［１］ (1) $\cos t = c$ とおくと，$\cos 2t = 2c^2 - 1$，$\cos 3t = 4c^3 - 3c$ より，

$$g(t) = (4c^3 - 3c) - 2(2c^2 - 1) + c = 4c^3 - 2c^2 - 2c + 1$$

よって，

$$2g(t) - 1 = 8c^3 - 4c^2 - 4c + 1 \ \cdots ①$$

また，

$$f(2\cos t) = (2c)^3 - (2c)^2 - 2(2c) + 1 = 8c^3 - 4c^2 - 4c + 1 \ \cdots ②$$

①，②より，$2g(t) - 1 = f(2\cos t)$ □

(2) 改めて $\cos\theta = c$ とおくと，(1) の経過より，

$$g(\theta) = 4c^3 - 2c^2 - 2c + 1$$

よって，証明すべき等式は次と同値.

$$2c(4c^3 - 2c^2 - 2c + 1) = 1 + c - 2(4c^3 - 2c^2 - 2c + 1)$$
$$\iff 8c^4 + 4c^3 - 8c^2 - 3c + 1 = 0 \ \cdots ③$$

$\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき，$3\theta + 4\theta = \pi$ より，

$$\cos 3\theta = -\cos 4\theta$$

が成り立つ．ここで，

$$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1 = 2(2c^2 - 1)^2 - 1 = 8c^4 - 8c^2 + 1$$

を用いて，

$$4c^3 - 3c = -(8c^4 - 8c^2 + 1) \quad \therefore\ 8c^4 + 4c^3 - 8c^2 - 3c + 1 = 0$$

よって，③は成り立ち，題意は示された．□

(3) 以下，$\theta = \frac{\pi}{7}$ とする．(2) より，

$$2g(\theta)\cos\theta = 1 + \cos\theta - 2g(\theta) \quad \therefore\ 2g(\theta)(1 + \cos\theta) = 1 + \cos\theta$$

$\cos\theta \neq -1$ より，$g(\theta) = \frac{1}{2}$

これと (1) とから，$f(2\cos\theta) = 2g(\theta) - 1 = 0$

よって，$x = 2\cos\theta$ は $f(x) = 0$ の解である．□

[2] (1) 自然数 n に対して，$\sin 2nt \cos t = \dfrac{1}{2}\{\sin(2n+1)t + \sin(2n-1)t\}$ の原始関数の 1 つを，

$$F(t) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2n+1}\cos(2n+1)t + \frac{1}{2n-1}\cos(2n-1)t\right\}$$

とおく．整数 k に対して，

$$\begin{aligned}\cos(2n+1)\frac{k}{2n}\pi &= \cos\left(k\pi + \frac{k}{2n}\pi\right)\\ &= \cos k\pi \cos\frac{k}{2n}\pi - \sin k\pi \sin\frac{k}{2n}\pi\\ &= (-1)^k \cos\frac{k}{2n}\pi\end{aligned}$$

同様に，$\cos(2n-1)\dfrac{k}{2n}\pi = (-1)^k\cos\dfrac{k}{2n}\pi$ であるから，

$$\begin{aligned}F\left(\frac{k}{2n}\pi\right) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}\right)(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi\\ &= (-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\cos\frac{k}{2n}\pi\end{aligned}$$

k を $k-1$ で置き換えて，

$$F\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right) = (-1)^k\frac{2n}{4n^2-1}\cos\frac{k-1}{2n}\pi$$

よって，与式左辺は，

$$F\left(\frac{k}{2n}\pi\right) - F\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right) = (-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

となる．□

(2) $x = x(t)$，$y = y(t)$ とおく．

$$x(\pi - t) = \sin(\pi - t) = \sin t = x(t)$$
$$y(\pi - t) = \sin 2n(\pi - t) = -\sin 2nt = -y(t)$$

より，曲線 C_n の $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分と $\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ の部分は x 軸対称である．$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲で，$x(t)$ は単調増加であり，$y(t) = 0$ とすると，

$$2nt = k\pi \quad \therefore\ t = \frac{k\pi}{2n}\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

以上より，曲線 C_n の概形を考えて，

$$\begin{aligned}S_n &= 2\sum_{k=1}^{n}\int_{\sin\frac{k-1}{2n}\pi}^{\sin\frac{k}{2n}\pi}|y|\,dx\\ &= 2\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}|\sin 2nt|\cos t\,dt\end{aligned}$$

積分区間において $\sin 2nt\cos t$ は常に 0 以上または常に 0 以下であるから，

$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\,dt\right|$$

ここで (1) の結果を用いると，$1 \leqq k \leqq n$ で $\cos\dfrac{k}{2n}\pi \geqq 0$，$\cos\dfrac{k-1}{2n}\pi \geqq 0$ であることに注意して，

$$S_n = \frac{4n}{4n^2-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

$T = \tan\dfrac{\pi}{4n}$ とおくと，問題文の等式を用いて，$n \geqq 2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T} - 1\right) + \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2T} - \frac{1}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k-1}{2n}\pi = \cos 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T} - 1\right) = \frac{1}{2T} + \frac{1}{2}$$

となる．これらの等式は $n = 1$ でも成り立つ．よって，

$$S_n = \frac{4n}{4n^2-1}\times\frac{1}{T} = \underline{\underline{\frac{4n}{(4n^2-1)\tan\frac{\pi}{4n}}}}$$

(3) (2) の結果を用いて，

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{4n}{4n^2-1}\times\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\\ &= \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\times\frac{16n^2}{4n^2-1}\times\frac{1}{\pi}\times\cos\frac{\pi}{4n}\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1\times 4\times\frac{1}{\pi}\times 1 = \underline{\underline{\frac{4}{\pi}}}$$

［ 3 ］ (1) P は正三角形 ABC の重心と一致するから，$\underline{\underline{\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)}}$

Q は AB の中点だから，$\underline{\underline{\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)}}$

(2) 線分 CP と △ABC の内接円の交点を R とすると，R の z 座標は $\frac{2}{3}$

よって，求める範囲は，$\underline{\underline{0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}}}$

(3) 平面 $z = t$ と線分 QR との交点を S，△ABC の内接円との交点を図のように T，U とする．

$\mathrm{QC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$，$\mathrm{QP} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

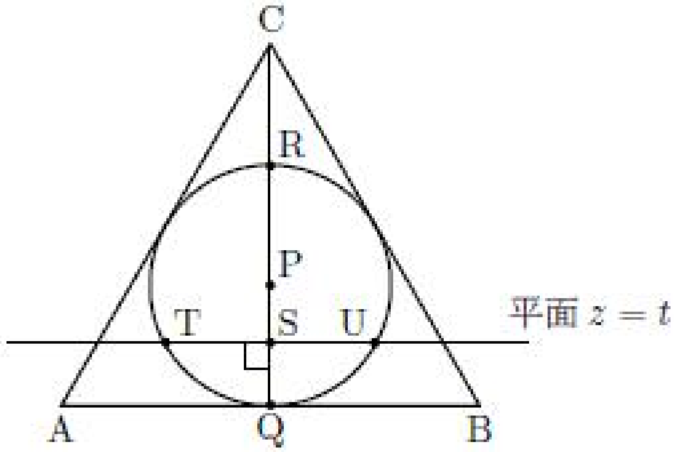
QS : QC = (S の z 座標) : (C の z 座標)

$= t : 1$

より，$\mathrm{QS} = \frac{\sqrt{6}}{2}t$

よって，$\mathrm{PS} = |\mathrm{QS} - \mathrm{QP}| = \left|\frac{\sqrt{6}}{2}t - \frac{\sqrt{6}}{6}\right|$

であるから，



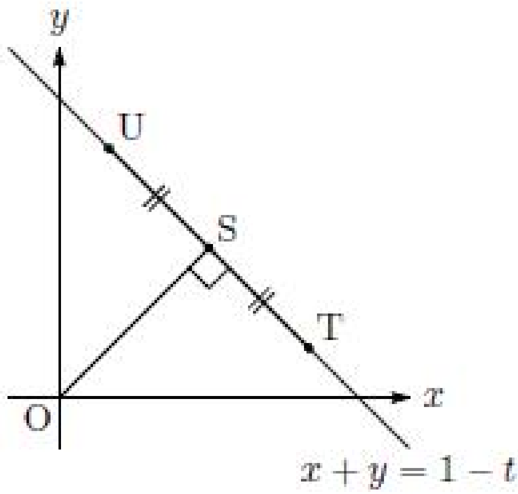
$$\begin{aligned}\mathrm{ST}^2 &= \mathrm{PT}^2 - \mathrm{PS}^2\\ &= \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}t - \frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2\\ &= -\frac{3}{2}t^2 + t\end{aligned}$$

よって，求める線分の長さは，$2\sqrt{-\frac{3}{2}t^2 + t} = \underline{\underline{\sqrt{-6t^2 + 4t}}}$

(4) 平面 $z = t$ による円板 D の切り口（線分 TU）の xy 平面への正射影は図のようになる．

この図において，線分 TU を点 O のまわりに回転してできる図形の面積は，

$$\begin{aligned}\pi\mathrm{OT}^2 - \pi\mathrm{OS}^2 &= \pi(\mathrm{OT}^2 - \mathrm{OS}^2)\\ &= \pi\mathrm{ST}^2\\ &= \pi\left(-\frac{3}{2}t^2 + t\right)\end{aligned}$$



これが題意の立体の平面 $z = t$ による切り口の面積に等しいから，求める体積は，

$$\pi\int_0^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{2}t^2 + t\right)dt = \underline{\underline{\frac{2}{27}\pi}}$$

[4] (1) 与漸化式を辺々加えて，

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=-2(a_n+b_n+c_n) \quad \therefore\ p_{n+1}=-2p_n$$

よって，$\{p_n\}$ は公比 -2 の等比数列であるから，

$$S_n=\frac{p_1\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\underline{\underline{\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^n\}}}$$

(2) $a_{n+1}=a_n-p_n$ より，$n\geqq 2$ に対して，

$$a_n=a_1-\sum_{k=1}^{n-1}p_k=a-S_{n-1}=\underline{\underline{a-\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}}}$$

この結果は $n=1$ でも成り立つ．同様にして，

$$b_n=\underline{\underline{b-\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}}}$$

$$c_n=\underline{\underline{c-\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}}}$$

(3) $T_1=q_1+q_2$ であり，

$$\begin{aligned} q_1 &= -(a^2+b^2+c^2) \\ q_2 &= {a_2}^2+{b_2}^2+{c_2}^2 \\ &= (-b-c)^2+(-c-a)^2+(-a-b)^2 \\ &= 2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca) \end{aligned}$$

であるから，

$$T_1=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$$

$a+b+c$ は奇数なので，T_1 は正の奇数である．

次に，n を自然数として，$T_{n+1}-T_n=q_{2n+2}+q_{2n+1}$ を考える．

簡単のため，$a_{2n+1}=A$，$b_{2n+1}=B$，$c_{2n+1}=C$ とおく．

$$\begin{aligned} q_{2n+1} &= -(A^2+B^2+C^2) \\ q_{2n+2} &= {a_{2n+2}}^2+{b_{2n+2}}^2+{c_{2n+2}}^2 \\ &= (-B-C)^2+(-C-A)^2+(-A-B)^2 \\ &= 2(A^2+B^2+C^2+AB+BC+CA) \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} T_{n+1}-T_n &= A^2+B^2+C^2+2AB+2BC+2CA \\ &= (A+B+C)^2 \\ &= {p_{2n+1}}^2 \end{aligned}$$

$\{p_n\}$ は初項 $a+b+c$（奇数），公比 -2 の等比数列であるから，${p_{2n+1}}^2$ は正の偶数である．よって，T_n が正の奇数であると仮定すると，T_{n+1} は正の奇数である．

以上で題意は示された．□

[5] (1) $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$ より，与式は次と同値.

$$\begin{cases} a^2+bc=0 & \cdots ① \\ b(a+d)=1 & \cdots ② \\ c(a+d)=1 & \cdots ③ \\ bc+d^2=0 & \cdots ④ \end{cases}$$

②，③より，$b=c$

これと①より，$a^2+b^2=0$

a，b は実数なので，$a=b=0$ となるが，これは②に反する.

よって，与式を満たす A は存在しない. $\square$

（別解）与式を満たす A の存在を仮定すると，$\det(A^2)=-1$ より，$(\det A)^2=-1$ となるが，これは $\det A$ が実数であることに反する. $\square$

(2) 与式は次と同値.

$$\begin{cases} a^2+bc=0 & \cdots ⑤ \\ b(a+d)=1 & \cdots ⑥ \\ c(a+d)=-1 & \cdots ⑦ \\ bc+d^2=0 & \cdots ⑧ \end{cases}$$

⑥，⑦より，$b=-c \cdots ⑨$

⑤ − ⑧ より，$a^2-d^2=0 \quad \therefore\ (a+d)(a-d)=0$

⑥より，$a+d\neq 0$ なので，$a-d=0 \quad \therefore\ a=d \cdots ⑩$

⑥，⑩より，$2ab=1 \quad \therefore\ ab=\dfrac{1}{2} \cdots ⑪$

⑤，⑨より，$a^2-b^2=0 \quad \therefore\ (a+b)(a-b)=0$

⑪より，a と b は同符号なので，$a=b$

よって，⑪より，$a=b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$a=b=d=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$c=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ （複号同順）

このとき，⑤〜⑧はすべて成り立つ. よって，

$$\underline{\underline{A=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

(3) (2) の A について，

$$A^4=(A^2)^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

よって，$\{A^n\}$ は，

$$A,\ A^2,\ A^3,\ A^4=-E,\ A^5=-A,\ A^6=-A^2,\ A^7=-A^3,\ A^8=E$$

以下，周期 8 で同じものの繰り返しとなる.

$$\sum_{k=1}^{8} A^k=A+A^2+A^3-E-A-A^2-A^3+E=O$$

であることに注意して，

$$\sum_{k=1}^{2013} A^k=\sum_{k=2009}^{2013} A^k=A+A^2+A^3-E-A=A^2+A^3-E$$

$$=\underline{\underline{\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}} \quad \text{（(2) の結果と複号同順）}$$

[6] (1) l_1, l_1' の方程式を $y = mx + n$ とおく．
楕円の方程式と連立して，y を消去すると，

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{9}(mx+n)^2 = 1$$
$$9x^2 + 16(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = 144$$
$$(16m^2+9)x^2 + 32mnx + 16n^2 - 144 = 0$$

この 2 次方程式が重解をもつので，判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4} = (16mn)^2 - (16m^2+9)(16n^2-144) = 0$$
$$\therefore\ 16^2m^2n^2 - (16^2m^2n^2 - 16\cdot 144m^2 + 144n^2 - 9\cdot 144) = 0$$
$$\therefore\ 16m^2 - n^2 + 9 = 0$$
$$\therefore\ n = \pm\sqrt{16m^2+9}$$

よって，求める方程式は，$\underline{\underline{y = mx \pm \sqrt{16m^2+9}}}$

(2) 点 $(0,\ \sqrt{16m^2+9})$ から直線 $mx - y - \sqrt{16m^2+9} = 0$ までの距離を考えて，

$$d_1 = \frac{\left|-2\sqrt{16m^2+9}\right|}{\sqrt{m^2+1}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}}}$$

$m \neq 0$ のとき，l_2, l_2' の傾きは $-\dfrac{1}{m}$ であるから，d_2 は d_1 の m を $-\dfrac{1}{m}$ で置き換えたものに等しく，

$$d_2 = \frac{2\sqrt{\dfrac{16}{m^2}+9}}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2}+1}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}}}$$

$m = 0$ のときは，l_2, l_2' は $x = \pm 4$ で，$d_2 = 8$ であるが，このときにも上式は成り立つ．

(3) $d_1{}^2 + d_2{}^2 = \dfrac{4(16m^2+9)}{m^2+1} + \dfrac{4(9m^2+16)}{m^2+1} = 100 \cdots$ ① となり，一定．$\square$

(4) $S = d_1d_2$ であり，①より，$d_2 = \sqrt{100 - d_1{}^2}$ であるから，$S = \underline{\underline{d_1\sqrt{100-d_1{}^2}}}$
相加相乗平均の不等式より，$d_1{}^2 + d_2{}^2 \geqq 2d_1d_2$
これと①とから，$100 \geqq 2d_1d_2 \quad \therefore\ S \leqq 50$
等号成立条件は，$d_1 = d_2$ であり，(2) の結果を用いると，

$$16m^2 + 9 = 9m^2 + 16 \quad \therefore\ m = \pm 1$$

である．よって，S の最大値は $\underline{\underline{50}}$