

平成 25 年度 個別学力試験問題

数 学 (120 分)

- 社会・国際学群 (社会学類, 国際総合学類)
- 人間学群 (教育学類, 心理学類, 障害科学類)
- 生命環境学群 (生物学類, 生物資源学類, 地球学類)
- 理工学群 (数学類, 物理学類, 化学類, 応用理工学類, 工学システム学類, 社会工学類)
- 情報学群 (情報科学類, 情報メディア創成学類, 知識情報・図書館学類)
- 医学群 (医学類, 医療科学類)

注 意

- 1 問題冊子は1ページから6ページまでである。
- 2 受験者は, 志望する学類の解答すべき問題を下表で確認のうえ, 解答しなさい。選択問題も含まれているので十分注意すること。
 ※ ○印のついた問題は必ず解答し, △印もしくは□印のついた問題については選択解答すること。それ以外の問題を解答してはならない。
- 3 解答用紙は問題に対応するものを使用すること。
- 4 国際総合学類においては, 「数学Ⅱ・数学B」または「数学Ⅲ・数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。
- 5 教育学類および障害科学類においては, 「数学Ⅱ・数学B」, 「数学Ⅲ」または「数学C」の問題のいずれかを選択解答すること。

学 類	解答すべき問題						備 考
	数学Ⅱ	数学Ⅲ	数学B	数学C			
	1	2	3	4	5	6	
社会学類	○			○			○印の問題2問を解答すること。
国際総合学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○		○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学Ⅲ・数学C」選択者		△	△	□	□	△印の中から1問, □印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
教育学類	「数学Ⅱ・数学B」選択者	○		○			○印の問題2問を解答すること。
障害科学類	「数学Ⅲ」選択者		○	○			○印の問題2問を解答すること。
	「数学C」選択者				○	○	○印の問題2問を解答すること。
心理学類	○	△	△	○	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計4問を解答すること。
生物学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
生物資源学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
地球学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
数学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
物理学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
化学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
応用理工学類	△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
工学システム学類	△	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から3問を選択解答。計5問を解答すること。
社会工学類	△	○	○	△	□	□	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問, □印の中から1問を選択解答。計4問を解答すること。
情報科学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
情報メディア創成学類	△	○	○	△	○	○	○印の問題は必ず解答。△印の中から1問を選択解答。計5問を解答すること。
知識情報・図書館学類	△	△	△	□	□	□	△印の中から1問, □印の中から1問を選択解答。計2問を解答すること。
医学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。
医療科学類	○	○	○	△	△	△	○印の問題は必ず解答。△印の中から2問を選択解答。計5問を解答すること。

[1] $f(x)$, $g(t)$ を

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$$

$$g(t) = \cos 3t - \cos 2t + \cos t$$

とおく。

(1) $2g(t) - 1 = f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\theta = \frac{\pi}{7}$ のとき, $2g(\theta)\cos\theta = 1 + \cos\theta - 2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\frac{\pi}{7}$ は3次方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

[2] n は自然数とする。

(1) $1 \leq k \leq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t \, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1} \left(\cos \frac{k}{2n}\pi + \cos \frac{k-1}{2n}\pi \right)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 媒介変数 t によって

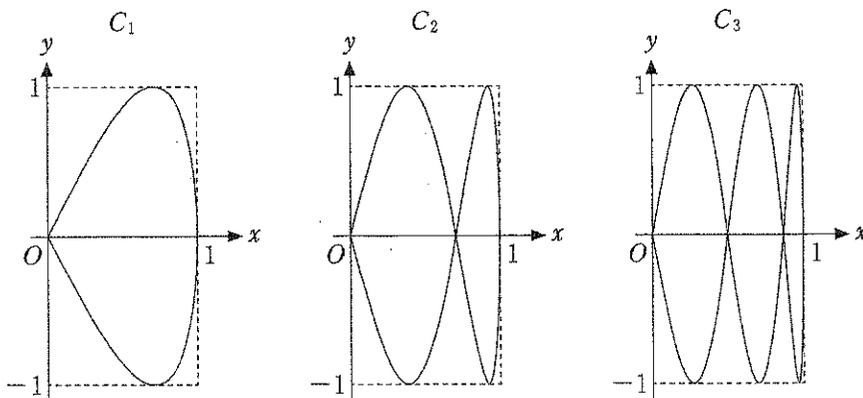
$$x = \sin t, \quad y = \sin 2nt \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4n}} - 1 \right) \quad (n \geq 2)$$

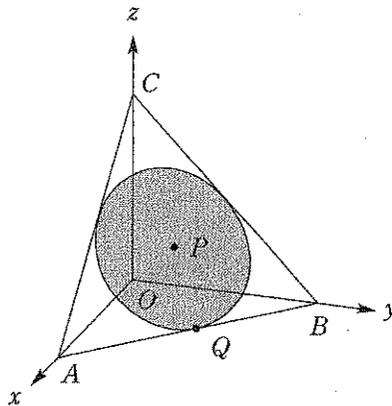
を用いてよい。

(3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。



〔3〕 xyz 空間において、点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を通る平面上にあり、正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P , 円板 D と辺 AB の接点を Q とする。

- (1) 点 P と点 Q の座標を求めよ。
- (2) 円板 D が平面 $z = t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。
- (3) 円板 D と平面 $z = t$ の共通部分が線分であるとき、その線分の長さを t を用いて表せ。
- (4) 円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。



[4] 3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ が

$$a_{n+1} = -b_n - c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_{n+1} = -c_n - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_{n+1} = -a_n - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

および $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ を満たすとする。ただし、 a , b , c は定数とする。

(1) $p_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $q_n = (-1)^n \{(a_n)^2 + (b_n)^2 + (c_n)^2\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする。 $a + b + c$ が奇数であれば、すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

[5] 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。ただし、 a, b, c, d は実数とする。

(1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A は存在しないことを示せ。

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を満たす A をすべて求めよ。

(3) (2)で求めた A のそれぞれについて $A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2013}$ を求めよ。

[6] 楕円 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ の、直線 $y = mx$ と平行な 2 接線を l_1, l_1' とし、 l_1, l_1' に直交する C の 2 接線を l_2, l_2' とする。

(1) l_1, l_1' の方程式を m を用いて表せ。

(2) l_1 と l_1' の距離 d_1 および l_2 と l_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。
ただし、平行な 2 直線 l, l' の距離とは、 l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3) $(d_1)^2 + (d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4) l_1, l_1', l_2, l_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。
さらに m が変化するとき、 S の最大値を求めよ。