［ 1 ］ $f'(x)=3x^2-1$ より，接点 $(t,\ f(t))$ における接線は，

$$y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t=(3t^2-1)x-2t^3$$

これが点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るとき，

$$b=(3t^2-1)a-2t^3 \quad \therefore\ 2t^3-3at^2+a+b=0\cdots①$$

題意より t の 3 次方程式①は異なる 3 つの実数解をもつ．

$$g(t)=2t^3-3at^2+a+b$$

とおくと，

$$g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$$

$g(t)$ は極値をもつから $a\neq 0$ であり，極値は，

$$f(0)=a+b,\ f(a)=-a^3+a+b$$

これらが異符号であるから，

$$(a+b)(-a^3+a+b)<0\ \cdots②$$

②の下で $a\neq 0$ は成り立つから，以下 a，b は②を満たすものとする．

(1) ①の 3 解が $t=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ であるから，解と係数の関係より，

$$\underline{\underline{\alpha+\beta+\gamma=\frac{3a}{2},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=-\frac{a+b}{2}}}$$

(2) $\mathrm{G}(X,\ Y)$ とおくと，(1) の結果を用いて，

$$X=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\frac{a}{2}$$

$$Y=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-(\alpha+\beta+\gamma)}{3}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma&=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\\&=(\alpha+\beta+\gamma)\left\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right\}\end{aligned}$$

より，

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\frac{27}{8}a^3-\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}b$$

よって，

$$Y=\frac{9}{8}a^3-a-\frac{1}{2}b$$

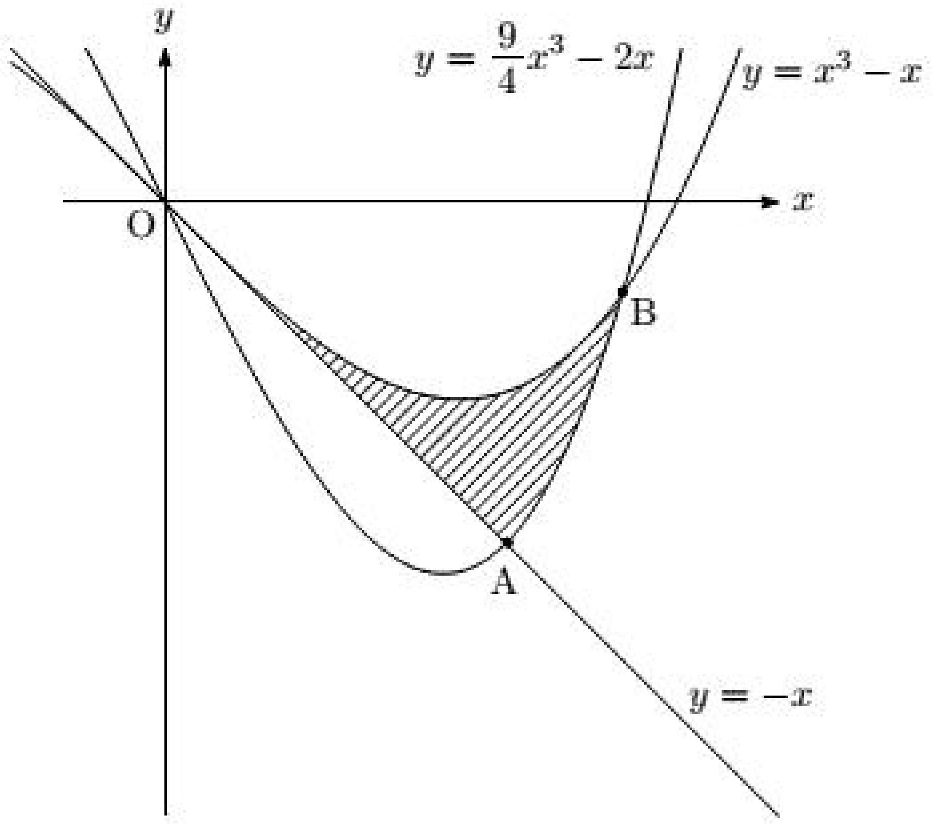
G の座標は $\underline{\underline{\left(\frac{a}{2},\ \frac{9}{8}a^3-a-\frac{1}{2}b\right)}}$

(3) $X>0$ より $a>0$，$Y<0$ より $b>\frac{9}{4}a^3-2a$

これと②より，点 P の範囲は

$$(x+y)(-x^3+x+y)<0 \text{ かつ } x>0 \text{ かつ } y>\frac{9}{4}x^3-2x$$

であり，図の斜線部（境界は除く）．



図において，直線 $y=-x$ は曲線 $y=x^3-x$ の原点における接線であり，点 A，B の座標は，$\mathrm{A}\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{2}{5\sqrt{5}}\right)$ である．

[2] (1) $f(x)=x\sin x+\cos x-1\,(0<x<\pi)$ とおく．

$f'(x)=x\cos x$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる．

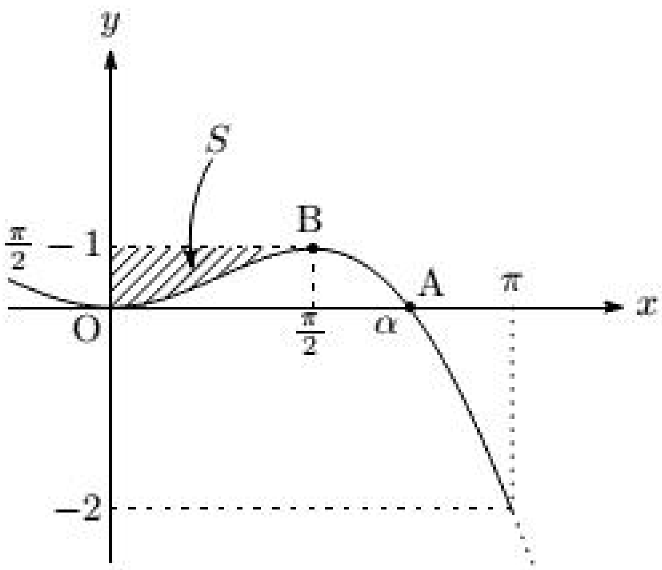
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	-2

したがって，曲線 C と x 軸の交点はただ1つ，区間 $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ にある．□

(2) $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{3}{2}=\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}>0$ ($\because$ $2\pi>6>3\sqrt{3}$)

これと (1) で調べたことより，$\alpha>\frac{2}{3}\pi$ □

(3)



図より，$S=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

ここで，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\Big[-x\cos x+2\sin x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2-\frac{\pi}{2}$

よって，$S=\frac{\pi^2}{4}-2$

また，$T=\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

したがって，証明すべき不等式 $S<T$ は次と同値．

$$\frac{\pi^2}{4}-2<\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\iff\frac{\pi^2-8}{\pi-2}<\alpha\ \cdots①$$

ここで，

$$\frac{\pi^2-8}{\pi-2}-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi^2+4\pi-24}{3(\pi-2)}<0$$

$$\left(\because\ \pi<\frac{16}{5}\ \text{より}\ \pi^2+4\pi-24<\left(\frac{16}{5}\right)^2+4\cdot\frac{16}{5}-24=-\frac{24}{25}<0\right)$$

よって，$\frac{\pi^2-8}{\pi-2}<\frac{2}{3}\pi$ であり，(2) の結果と合わせて①は成り立つ．□

[3] (1) $f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ より，接線 l_a は，

$$y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}(x-a)+e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \cdots ①$$

$x=0$ のとき $y=Y(a)$ なので，

$$Y(a)=(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

ただし，$f(x)$ の定義域より，$a>0$ である．

$$Y'(a)=(-a^3+a)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

より $Y(a)$ の増減は次のようになる．

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$Y'(a)$		$+$	0	$-$
$Y(a)$	1	$\nearrow$	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

$\dfrac{a^2}{2}=t$ とおくと，

$$\lim_{a\to\infty}Y(a)=\lim_{t\to\infty}(2t+1)e^{-t}=\lim_{t\to\infty}\left(2te^{-t}+e^{-t}\right)=0$$

以上より，$Y(a)$ の値域は，$\underline{\underline{0<Y(a)\leqq\dfrac{2}{\sqrt{e}}}}$

(2) ①より l_a の x 切片は，

$$0=-ae^{-\frac{a^2}{2}}(x-a)+e^{-\frac{a^2}{2}} \quad \therefore\ x=a+\frac{1}{a}$$

同様に，l_b の x 切片は $x=b+\dfrac{1}{b}$ であり，これらが等しいので，

$a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b} \quad \therefore\ b^2-\left(a+\dfrac{1}{a}\right)b+1=0 \quad \therefore\ (b-a)\left(b-\dfrac{1}{a}\right)=0$

$a\neq b$ より，$\underline{\underline{b=\dfrac{1}{a}}}$

ただし，$0<a<b$ より，$0<a<\dfrac{1}{a} \quad \therefore\ \underline{\underline{0<a<1}}$

(3) $a\to+0$ のとき，$b=\dfrac{1}{a}\to\infty$ なので，(1) で調べたことより，

$$Y(a)\to 1,\ Y(b)\to 0$$

したがって，$Z(a)=Y(a)-Y(b)\to 1-0=\underline{\underline{1}}$

次に，$Z(a)=Y(a)-Y\left(\dfrac{1}{a}\right)$ より，

$$Z'(a)=Y'(a)-Y'\left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{a^2}\right)$$

よって，

$$\frac{Z'(a)}{a}=\frac{Y'(a)}{a}+\frac{1}{a^3}Y'\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{Y'(a)}{a}+b^3Y'(b)$$

ここで，$a\to+0$ のとき，

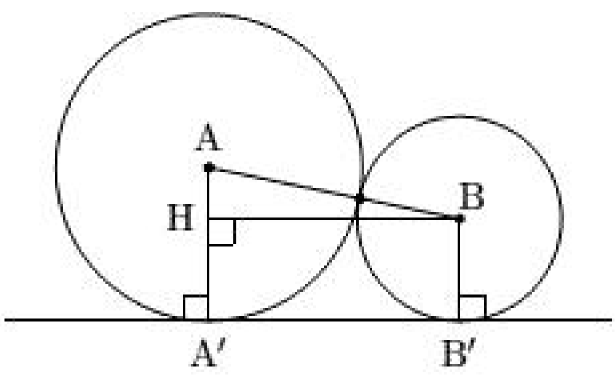
$$\frac{Y'(a)}{a}=(-a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}\to 1$$

また，$\dfrac{b^2}{2}=t$ とおくと，$b\to\infty$ のとき，$t\to\infty$ であるから，

$$b^3Y'(b)=(-b^6+b^4)e^{-\frac{b^2}{2}}=-8t^3e^{-t}+4t^2e^{-t}\to 0$$

よって，$\dfrac{Z'(a)}{a}\to\underline{\underline{1}}$

［4］まず，右図のように外接する2円A，Bの半径をそれぞれs，t，共通外接線との接点をそれぞれA$'$，B$'$とすると，△ABHで三平方の定理より，



$$\mathrm{BH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{AH}^2$$
$$=(s+t)^2-(s-t)^2=4st$$

よって，$\mathrm{A'B'}=\mathrm{BH}=2\sqrt{st}\ \cdots(\star)$ が成り立つ．(図では$s>t$としてあるが，$s<t$，$s=t$の場合でも$(\star)$は成り立つ.)

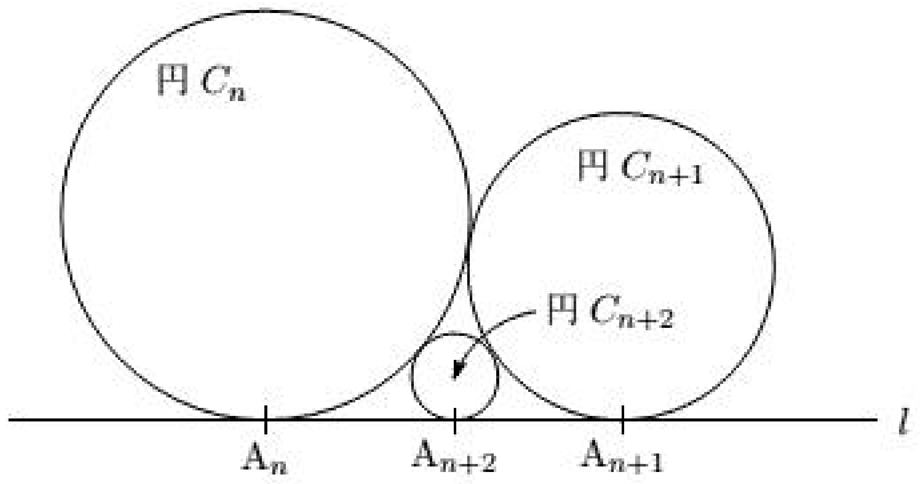
(1) $(\star)$を用いて，$\mathrm{A_1A_2}=2\sqrt{r_1r_2}=\underline{\underline{24}}$，$\mathrm{A_1A_3}=2\sqrt{r_1r_3}=8\sqrt{r_3}$，

$\mathrm{A_2A_3}=2\sqrt{r_2r_3}=6\sqrt{r_3}$

これらと$\mathrm{A_1A_2}=\mathrm{A_1A_3}+\mathrm{A_2A_3}$より，$24=14\sqrt{r_3}$　$\therefore\ r_3=\underline{\underline{\dfrac{144}{49}}}$

よって，$\mathrm{A_1A_3}=\underline{\underline{\dfrac{96}{7}}}$，$\mathrm{A_2A_3}=\underline{\underline{\dfrac{72}{7}}}$

(2) 円C_nと直線lの接点をA_nとおく．



$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+2}+\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$に$(\star)$を用いて，

$$2\sqrt{r_nr_{n+1}}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}+2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}+\frac{1}{\sqrt{r_n}}\quad\therefore\ x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$$

よって，$\underline{\underline{a=b=1}}$であり，題意は示された．□

(3) $t^2=t+1$の2解がα，β $(\alpha>\beta)$なので，

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$x_1=\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}=\dfrac{1}{4}$より，$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$は次と同値．

$$\frac{1}{4}=c\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}+d\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\iff\frac{1}{2}(c-d)\sqrt{5}+\frac{3}{2}(c+d)-\frac{1}{4}=0$$

c，dは有理数，$\sqrt{5}$は無理数であるから，

$$\frac{1}{2}(c-d)=\frac{3}{2}(c+d)-\frac{1}{4}=0$$

よって，$\underline{\underline{c=d=\dfrac{1}{12}}}$

(4) $y_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}=\dfrac{1}{12}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$と定める．

(3)より$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$であるから，$y_1=x_1\ \cdots$①

また，$y_2=\dfrac{1}{12}(\alpha^3+\beta^3)$

ここで，$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$より，$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=4$

よって，$y_2=\dfrac{1}{3}$

これと$x_2=\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{1}{3}$より，$y_2=x_2\ \cdots$②

αは$t^2=t+1$の解なので，

$$\alpha^2=\alpha+1\quad\therefore\ \alpha^{n+3}=\alpha^{n+2}+\alpha^{n+1}$$

が成り立ち，βについても同様であるから，

$$\frac{1}{12}(\alpha^{n+3}+\beta^{n+3})=\frac{1}{12}(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+\frac{1}{12}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$$

すなわち，$y_{n+2}=y_{n+1}+y_n$が成り立つ．

これと(2)で求めた$\{x_n\}$の漸化式が同じ形であること，および①，②より，すべてのnについて，$y_n=x_n$が成り立ち，題意は示された．□

$$r_n=\frac{1}{{x_n}^2}=\underline{\underline{\frac{144}{(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})^2}}}$$

［５］ (1) $AB = \begin{pmatrix} a-b & a+2b \\ c-d & c+2d \end{pmatrix}$，$BA = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+2c & -b+2d \end{pmatrix}$

より，$AB = BA$ は次と同値．

$$\begin{cases} a-b = a+c \\ a+2b = b+d \\ c-d = -a+2c \\ c+2d = -b+2d \end{cases} \iff \begin{cases} c = -b \\ d = a+b \end{cases}$$

よって，このとき $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$

一方，$xB + yE = \begin{pmatrix} x+y & x \\ -x & 2x+y \end{pmatrix}$

より，$x = b$，$y = a-b$ とすれば，$A = xB + yE$ と表せる．□

(2) ケーリー・ハミルトンの定理より，$A^2 - tA + \Delta E = O$

よって，$A^2 = tA - \Delta E$,

$$A^3 = tA^2 - \Delta A = t(tA - \Delta E) - \Delta A = (t^2 - \Delta)A - t\Delta E$$

よって，$A^3 = E$ より，

$$(t^2 - \Delta)A - t\Delta E = E \quad \therefore\ (t^2 - \Delta)A = (t\Delta + 1)E \quad \square$$

(3) $AB = BA$ が成り立つとき，(1) の経過より，$c = -b$，$d = a+b$

$$\therefore\ t = 2a + b,\ \Delta = a^2 + ab + b^2$$

さらに $A^3 = E$ が成り立つとき，(2) の結果より，

$$3a(a+b)A = \{(2a+b)(a^2+ab+b^2)+1\}E \ \cdots ①$$

(i) $a = 0$ のとき，①より，

$$(2a+b)(a^2+ab+b^2)+1 = b^3+1 = 0 \quad \therefore\ b = -1$$

(ii) $a + b = 0$ のとき，①より，

$$(2a+b)(a^2+ab+b^2)+1 = a^3+1 = 0 \quad \therefore\ a = -1,\ b = 1$$

(iii) 上記以外のとき，$3a(a+b) \neq 0$ であるから，①より $A = kE$（k は実数）と表せて，$A^3 = E$ より $k^3 = 1 \quad \therefore\ k = 1$

以上より，

$$\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

これらはすべて $AB = BA$ および $A^3 = E$ を満たす．

[6] (1) 楕円 C_1 の焦点は $(\pm\sqrt{a^2-9},\ 0)$，双曲線 C_2 の焦点は $(\pm\sqrt{4+b^2},\ 0)$

C_1 と C_2 は同一の焦点をもつので，$a^2-9=4+b^2$ $\quad\therefore\ \underline{\underline{b^2=a^2-13}}$ $\cdots$①

（以下，①を用いて b を消去するが，$a>\sqrt{13}$ の下で①を満たす $b(>0)$ は存在することに注意する.）

$C_1: y^2=9\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$，$C_2: y^2=b^2\left(\dfrac{x^2}{4}-1\right)$ を連立して y を消去すると，

$$9-\frac{9}{a^2}x^2=\frac{b^2}{4}x^2-b^2 \quad \therefore\ \left(\frac{9}{a^2}+\frac{b^2}{4}\right)x^2=9+b^2$$

ここに①を代入して整理すると，

$$\frac{(a^2-4)(a^2-9)}{4a^2}x^2=a^2-4 \quad \therefore\ x^2=\frac{4a^2}{a^2-9}$$

このとき，

$$y^2=9\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=9\left(1-\frac{4}{a^2-9}\right)=\frac{9(a^2-13)}{a^2-9}$$

点 P は C_1 と C_2 の第 1 象限における交点なので，$x>0$，$y>0$ に注意して，

$$\underline{\underline{\mathrm{P}\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2-9}},\ \frac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}\right)}}$$

(2) $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく.

$l_1:\ \dfrac{sx}{a^2}+\dfrac{ty}{9}=1$ の法線ベクトルの 1 つを $\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{s}{a^2},\ \dfrac{t}{9}\right)$ とおく.

$l_2:\ \dfrac{sx}{4}-\dfrac{ty}{b^2}=1$ の法線ベクトルの 1 つを $\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{s}{4},\ -\dfrac{t}{b^2}\right)$ とおく.

このとき，①と (1) で求めた P の座標を用いて，

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{s^2}{4a^2}-\frac{t^2}{9b^2}=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{4a^2}{a^2-9}-\frac{1}{9(a^2-13)}\cdot\frac{9(a^2-13)}{a^2-9}=0$$

よって，$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ より，$l_1\perp l_2$ □

(3) $x=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$，$y=\dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}$ とおく.

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{4a^2}{a^2-9} & \cdots② \\ y^2=\dfrac{9(a^2-13)}{a^2-9} & \cdots③ \\ x>0 & \cdots④ \\ y>0 & \cdots⑤ \\ a>\sqrt{13} & \cdots⑥ \end{cases}$$

②より，$a^2=\dfrac{9x^2}{x^2-4}$ $\cdots$⑦

これと⑥より，$\dfrac{9x^2}{x^2-4}>13$ であり，④と合わせて，$2<x<\sqrt{13}$

また，⑦を③に代入して整理すると，$x^2+y^2=13$

以上より，P の軌跡は，

円 $x^2+y^2=13$ の $2<x<\sqrt{13}$ かつ $y>0$ を満たす部分

であり，図の太線部分（両端点は除く）.