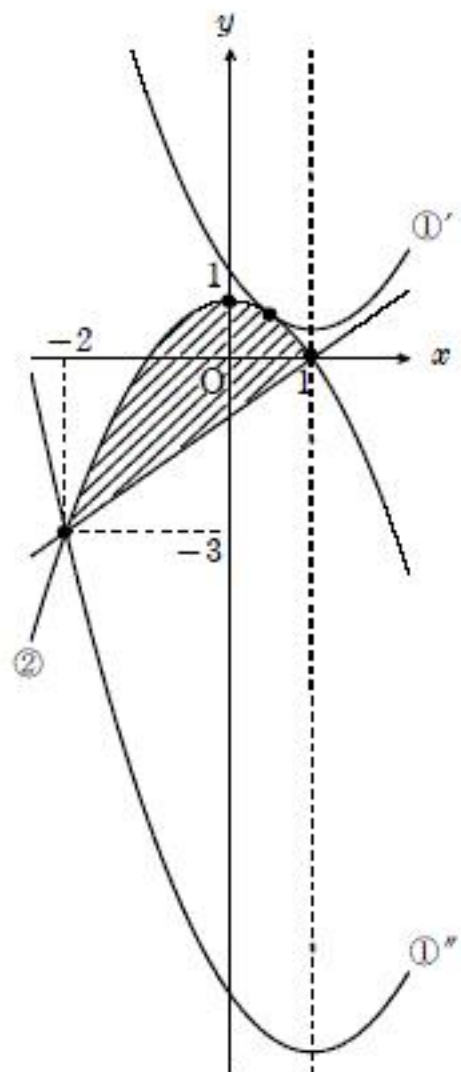


[1]

(1)

$$\begin{cases} y \leq -x^2 + 1 \\ y \geq x - 1 \end{cases}$$

領域は図の斜線部で境界も含む.これをSとする.



(2)

$$y = x^2 - 2x + k \quad \dots\dots ①$$

$$y = -x^2 + 1 \quad \dots\dots ②$$

①, ②を連立して y を消去すると,

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + k &= -x^2 + 1 \\ 2x^2 - 2x + k - 1 &= 0 \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

③が実数解をもつから,

$$(-1)^2 - 2(k-1) \geq 0 \quad \therefore \underline{k \leq \frac{3}{2}}$$

(3) $y - x^2 + 2x = k$ とおく.

$$y = x^2 - 2x + k = (x-1)^2 + k - 1 \quad \dots\dots ①$$

①は下に凸の放物線を表し, 頂点は $(1, k-1)$ である.これがSと共有点をもつ k の範囲を考える.

(I) (2)で, $k = \frac{3}{2}$ のとき, ③は $x = \frac{1}{2}$ を重解にもち, ①と②のグラフは,

点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ で接する.

このとき, 図の①' のようになるから,

$$\underline{\max k = \frac{3}{2}, (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)}$$

(II) 放物線①が点 $(-2, -3)$ を通るとき, 図の①'' のようになるから,

$$\underline{\min k = -11, (x, y) = (-2, -3)}$$

【2】内心をIとする.

$$\begin{aligned}\angle CAI &= \angle BAI = \frac{\alpha}{2} \\ \angle ABI &= \angle CBI = \angle ACI \\ &= \angle BCI = \frac{\beta}{2}\end{aligned}$$

である.

(1) $\triangle IAQ$ で

$$\begin{aligned}\tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{IQ}{AQ} = \frac{1}{AQ} \\ \therefore AQ &= \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

$\triangle ICQ$ で

$$\begin{aligned}\tan \frac{\beta}{2} &= \frac{IQ}{QC} = \frac{1}{QC} \\ \therefore QC &= \frac{1}{\tan \frac{\beta}{2}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\triangle IAQ &= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot IQ = \frac{1}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} \\ \triangle ICQ &= \frac{1}{2} \cdot QC \cdot IQ = \frac{1}{2 \tan \frac{\beta}{2}} \\ \triangle IAQ &\equiv \triangle IAR, \triangle ICQ \equiv \triangle ICP \equiv \triangle IBR \equiv \triangle IBP\end{aligned}$$

だから,

$$S = 2\triangle IAQ + 4\triangle ICQ = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} + \frac{2}{\tan \frac{\beta}{2}}$$

$\triangle ABC$ の内角の和より,

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta &= \pi \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \therefore \frac{\alpha}{2} &= \frac{\pi}{2} - \beta \\ \therefore \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} &= \tan \beta = \frac{2 \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}\end{aligned}$$

ゆえに, $t = \tan \frac{\beta}{2}$ を用いて,

$$S = \frac{2t}{1-t^2} + \frac{2}{t} = \frac{2}{(1-t^2)t} \quad \text{とかける.}$$

(3) ①より, β の変域は,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{4}$$

ゆえに, t の変域は $0 < t < 1$

$f(t) = (1-t^2)t = -t^3 + t$ とおく.

$$f'(t) = -3t^2 + 1$$

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

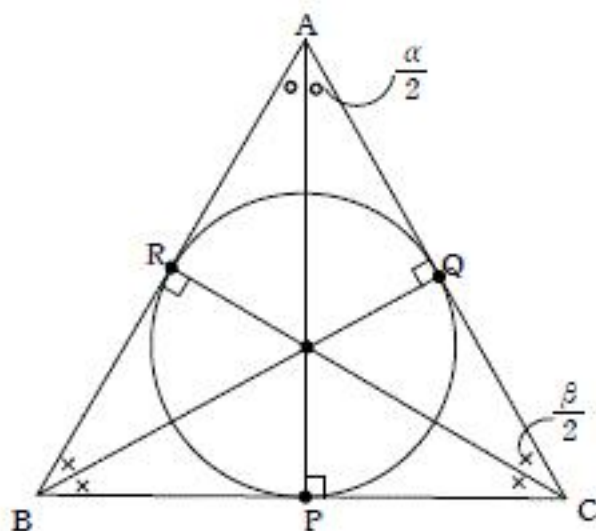
よって, $f(t)$ の値域は $0 < f(t) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$

$S = \frac{2}{f(t)}$ より, $S \geq 3\sqrt{3}$ が成り立つ.

等号成立条件は,

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \therefore \beta = \frac{\pi}{3}$$

すなわち, $\triangle ABC$ が正三角形であること.



[3]

(1) α は $x^2-2px-q=0$ の解だから,

$$\alpha^2-2p\alpha-q=0$$

両辺に α^{n-1} をかけると,

$$\alpha^{n+1}-2p\alpha^n-q\alpha^{n-1}=0 \dots\dots ①$$

同様にして,

$$\beta^{n+1}-2p\beta^n-q\beta^{n-1}=0 \dots\dots ②$$

$(①+②) \times \frac{1}{2}$ より,

$$\frac{1}{2}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-2p\cdot\frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n)-q\cdot\frac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})=0$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} a_{n+2}-2pa_{n+1}-qa_n &= 0 \\ \therefore a_{n+2} &= 2pa_{n+1}+qa_n \dots\dots ③ \end{aligned}$$

(2) $a_1=1, a_2=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=p$ ($\because \alpha+\beta=2p$) より,

$$a_1 \in \mathbb{Z}, a_2 \in \mathbb{Z}$$

また, ③より, ある番号 n について,

$$a_n \in \mathbb{Z} \quad \text{かつ} \quad a_{n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_{n+2} \in \mathbb{Z}$$

である. ゆえに数学的帰納法により, すべての番号 n について, $a_n \in \mathbb{Z}$ である.

(3) $\frac{\alpha^{n-1}}{2}=a_n-\frac{\beta^{n-1}}{2} \dots\dots ④$

$$\beta=p-\sqrt{p^2+q}$$

である.

$q<2p+1$ より,

$$\begin{aligned} (0<) \quad p^2+q &< p^2+2p+1 \\ \therefore \sqrt{p^2+q} &< \sqrt{(p+1)^2}=p+1 \\ \therefore \beta &> p-(p+1)=-1 \end{aligned}$$

また, $p<\sqrt{p^2+q}$ より, $\beta<0$

ゆえに, $-1<\beta<0 \dots\dots ⑤$

(I) n が偶数のとき

⑤より,

$$-1<\beta^{n-1}<0 \quad \therefore \frac{1}{2}>-\frac{\beta^{n-1}}{2}>0$$

これと④および, $a_n \in \mathbb{Z}$ より, $b_n=a_n$

(II) n が3以上の奇数のとき, 上と同様にして,

$$\begin{aligned} 0<\beta^{n-1}<1 \quad \therefore 0>-\frac{\beta^{n-1}}{2}>-\frac{1}{2} \\ \therefore b_n &= a_n-1 \quad (\text{これは } n=1 \text{ でも成り立つ}) \end{aligned}$$

まとめて,

$$\underline{b_n = \begin{cases} a_n & (n \text{ が偶数}) \\ a_n-1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}}$$

[4]

$$(1) \quad f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

I は、 $y = f'(t)(x-t) + f(t)$ とかけて、
 $x=0$ のとき、 $y=b(t)$ だから、

$$\begin{aligned} b(t) &= -tf'(t) + f(t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ &= -t \cdot \underbrace{\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\log(e^t + e^{-t})}_{\textcircled{3}} \\ \textcircled{2} &= \frac{e^t + e^{-t} - 2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = 1 - \frac{2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \\ \textcircled{3} &= \log e^t (1 + e^{-2t}) = t + \log(1 + e^{-2t}) \end{aligned}$$

これらを代入すると、

$$\begin{aligned} b(t) &= -t \left(1 - \frac{2e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \right) + t + \log(1 + e^{-2t}) \\ &= \frac{2te^{-t}}{e^t + e^{-t}} + \log(1 + e^{-2t}) \end{aligned}$$

(2) $x \geq 0$ とする. $g(x) = x - \log(1+x)$ とおく.

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$$

ゆえに、 $g(x) \geq g(0) = 0$
 $\therefore \log(1+x) \leq x$

(3) $t \geq 0$ とする.(2)より、

$$\begin{aligned} \log(1+t) &\leq t \quad (= \log e^t) \\ \therefore 1+t &\leq e^t \\ \therefore t &\leq e^t \\ \therefore te^{-t} &\leq 1 \\ \therefore \frac{2te^{-t}}{e^t + e^{-t}} &\leq \frac{2}{e^t + e^{-t}} \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

また、(2)で $x = e^{-2t} (> 0)$ とすると、

$$\log(1 + e^{-2t}) \leq e^{-2t} \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{5} \text{ より、 } b(t) \leq \frac{2}{e^t + e^{-t}} + e^{-2t}$$

(4) ①より、

$$b'(t) = -f'(t) - tf''(t) + f'(t) = -tf''(t)$$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \\ \therefore b'(t) &= \frac{-4t}{(e^t + e^{-t})^2} \end{aligned}$$

ゆえに、 $I = \int_0^x \frac{4t}{(e^t + e^{-t})^2} dt$ とおくと、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^x (-b'(t)) dt = -[b(t)]_0^x \\ &= -b(x) + b(0) \quad \cdots \cdots \textcircled{6} \end{aligned}$$

$x \geq 0$ とする.(1)より、

$$b(x) = \underbrace{\frac{2xe^{-x}}{e^x + e^{-x}}}_{0 \text{ 以上}} + \underbrace{\log(1 + e^{-2x})}_{\geq 0} > 0$$

これと、(3)より、

$$0 < b(x) \leq \frac{2}{e^x + e^{-x}} + e^{-2x}$$

が成り立ち、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{右辺}) = 0$ だから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = 0$$

これと、⑥より、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I = b(0) \quad \text{である.}$$

[5]

(1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の下で, $g(x)=h(x)$ とすると,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \sin x$$

$$\cos x = \sin x$$

$x = \frac{\pi}{2}$ では成り立たないから, $\cos x \neq 0$ であり,

$$1 = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \therefore \tan x = 1 \quad \therefore x = \frac{\pi}{4}$$

ゆえに, C_2 と C_3 の交点は,

$$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $f(\alpha)=h(\alpha)$ より,

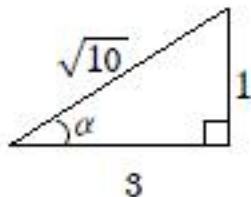
$$\frac{1}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = 3 \sin \alpha$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ では成り立たないから, $\cos \alpha \neq 0$ であり,

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \therefore \tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



(3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ より,

また, 題意の図形は右図の斜線部分のようになる.

この面積を S とすると,

$$S = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx}_{\text{①}} - \underbrace{\int_0^{\alpha} f(x) dx}_{\text{②}} - \underbrace{\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} h(x) dx}_{\text{③}}$$

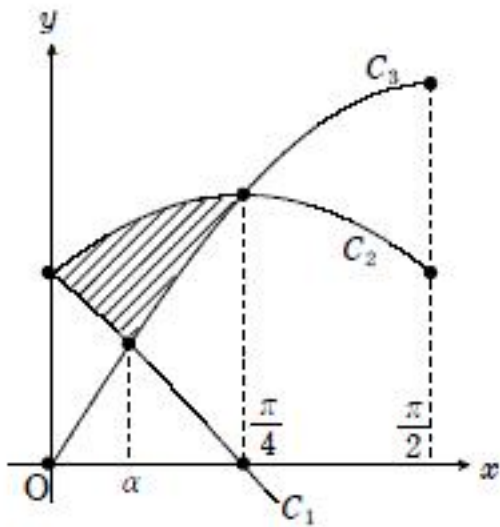
$$\begin{aligned} \text{①} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{②} &= \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} (\cos x - \sin x) dx \\ &= \frac{1}{2} [\sin x + \cos x]_0^{\alpha} = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha - 1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{③} &= \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = [-\cos x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \cos \alpha \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

これらを代入して,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \\ &= 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$



[6] α は虚数, $\beta > 0$ であることに注意する.

(1) $\alpha \bar{z} + \bar{\alpha} z = |z|^2$ を同値変形すると,

$$z \bar{z} - \alpha \bar{z} - \bar{\alpha} z = 0$$

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) - \alpha \bar{\alpha} = 0$$

$$|z - \alpha|^2 = |\alpha|^2$$

$$|z - \alpha| = |\alpha|$$

となる.

$\alpha \neq 0$ より, $|\alpha| > 0$ だから, 図形 C は, 「中心 α , 半径 $|\alpha|$ の円」である.

この円は原点を通る.

(2) $\omega = (z - \alpha)(\beta - \bar{\alpha})$ とおく.

ω が純虚数となる条件は,

「 $\omega + \bar{\omega} = 0$ ① かつ $\omega \neq 0$ ②」である.

$\beta - \bar{\alpha} \neq 0$ より, $\omega = 0 \iff z = \alpha$

だから, ② $\iff z \neq \alpha$

また, ①を同値変形すると,

$$(z - \alpha)(\beta - \bar{\alpha}) + (\bar{z} - \bar{\alpha})(\beta - \alpha) = 0$$

$$\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} + \frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{\beta - \alpha} = 0$$

$$\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} + \overline{\left(\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha} \right)} = 0$$

となる.

これと, $z \neq \alpha$ より, $\frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}$ は純虚数だから, $\overline{\alpha\beta} \perp \overline{\alpha z}$ である.

ゆえに, 図形 L は, 「点 α を通り, $\overline{\alpha\beta}$ に垂直な直線の点 α を除く部分」である.

よって, L は円 C と 2 交点をもつ.

$$PQ = (\text{円 } C \text{ の直径}) = 2|\alpha| = 2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$$

(3) 図より, $\triangle PQR$ が正三角形となる条件は,

$$AR = \sqrt{3}AP$$

$$|\beta - \alpha| = \sqrt{3}|\alpha|$$

$$|\beta - \alpha|^2 = 3|\alpha|^2$$

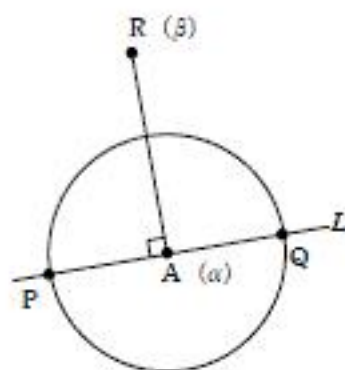
$$(\beta - \alpha)(\beta - \bar{\alpha}) = 3|\alpha|^2$$

$$\beta^2 - (\alpha + \bar{\alpha})\beta - 2|\alpha|^2 = 0$$

$$\beta = \frac{\alpha + \bar{\alpha} \pm \sqrt{(\alpha + \bar{\alpha})^2 + 8|\alpha|^2}}{2}$$

$\beta > 0$ より,

$$\beta = \frac{\alpha + \bar{\alpha} + \sqrt{(\alpha + \bar{\alpha})^2 + 8\alpha\bar{\alpha}}}{2}$$



[7]

$$(1) \ A \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \beta \end{pmatrix} \text{ より,}$$

$$A \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta^2 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

ゆえに,

$$AQ = Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(2) \ \det Q = \alpha - \beta \neq 0 \text{ より,}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } A = Q \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ だから,}$$

$$\begin{aligned} A^n &= Q \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & \beta^{n+1} \\ \alpha^n & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & -\alpha^{n+1}\beta + \alpha\beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n & -\alpha^n\beta + \alpha\beta^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{pmatrix}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, y_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \\ &\quad (\alpha^0 = 1, \beta^0 = 1 \text{ と定めれば, } n = 1 \text{ でも成り立つ.}) \end{aligned}$$

$$(3) \text{ すべての } n \ (\geq 2) \text{ について}$$

$$y_n = \frac{1}{2} x_n \iff \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} = \frac{1}{2} (\alpha^n - \beta^n)$$

が成り立つことが必要十分.

$\beta = 0$ とすると,

$$\alpha \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \alpha^{n-1} = \frac{1}{2} \alpha^n$$

$$\therefore \alpha = 2$$

答は,

$$\underline{(\alpha, \beta) = (2, 0), A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$