

[1]

(1) C_1, C_2 の式を連立して y を消去すると,

$$\begin{aligned}x^2 &= -x^2 + 2kx + 1 - k^2 \\ \therefore 2x^2 - 2kx + k^2 - 1 &= 0 \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

x の 2 次方程式①の 2 解を α, β とする.

2 曲線 C_1, C_2 が $x > 0$ の範囲に 2 交点をもつ条件は

$$\begin{cases} \frac{D}{4} = -k^2 + 2 > 0 & (D \text{ は①の判別式}) \\ \alpha + \beta = k > 0 \\ \alpha\beta = \frac{1}{2}(k^2 - 1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{答は } \underline{1 < k < \sqrt{2}} \quad \dots\dots ②$$

(2) $P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2), G(X, Y)$ とする.

$$\begin{aligned}X &= \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{k}{3}, Y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{3} = \frac{1}{3} \\ \left(\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = k^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}(k^2 - 1) = 1 \right)\end{aligned}$$

$$\text{②より, } X \text{ の動く範囲は } \underline{\frac{1}{3} < X < \frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$\text{ゆえに } G \text{ の軌跡は直線 } y = \frac{1}{3} \text{ の } \underline{\frac{1}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ の部分}}$$

(3)

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} |\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta| = \frac{1}{2} |\alpha\beta(\beta - \alpha)| \\ S^2 &= \frac{1}{4} (\alpha\beta)^2 (\beta - \alpha)^2 \leftarrow (\beta - \alpha)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 1 - 2\alpha\beta \\ &= \frac{1}{4} (\alpha\beta)^2 (1 - 2\alpha\beta) \leftarrow \alpha\beta = \frac{1}{2}(k^2 - 1) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{16} (k^2 - 1)^2 (2 - k^2) }}\end{aligned}$$

(4) $S > 0$ より, S が最大 $\iff S^2$ が最大

$k^2 = t$ とおくと, ②より t の変域は $1 < t < 2$

$$S^2 = \frac{1}{16} (t - 1)^2 (2 - t)$$

$f(t) = (t - 1)^2 (2 - t)$ ($1 < t < 2$) とおく.

$$\begin{aligned}f'(t) &= 2(t - 1)(2 - t) + (t - 1)^2 (-1) \\ &= -3(t - 1) \left(t - \frac{5}{3} \right)\end{aligned}$$

$f(t)$ の増減表

t	1	...	$\frac{5}{3}$	...	2
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

$t = \frac{5}{3}$ のとき, $k = \frac{\sqrt{15}}{3}$ (S が最大となる k の値)

このとき, $X = \frac{k}{3} = \frac{\sqrt{15}}{9}$ より, 答は $\underline{G\left(\frac{\sqrt{15}}{9}, \frac{1}{3}\right)}$

((2)の注) O, P, Q は放物線 C_1 上の異なる 3 点だから, 同一直線上にあることはなく,
 $\triangle OPQ$ は常に存在する.

[2] 図のように点をとる.

$$OA = d_1 = \sin 2\theta$$

2円の中心A, Bと接点Dは

$\angle POQ (= 2\theta)$ の二等分線上にある.

円 C_n の半径を r_n とする. ($n=1, 2$)

(1) $\triangle OAA'$ において

$$r_1 = AA' = OA \sin \theta = \sin 2\theta \sin \theta = \underline{2 \sin^2 \theta \cos \theta}$$

Bから AA' に下ろした垂線の足をHとすると

$\triangle ABH$ において, $AB = r_1 + r_2$, $AH = r_1 - r_2$, $\angle ABH = \theta$

$$AH = AB \sin \angle ABH \therefore r_1 - r_2 = (r_1 + r_2) \sin \theta$$

$$\therefore r_2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \cdot r_1 = \underline{\underline{\frac{2 \sin^2 \theta \cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta}}}$$

(2) $\triangle ODQ$ において

$$OD = OA - AD = d_1 - r_1 = \sin 2\theta - \sin 2\theta \sin \theta$$

$$DQ = OD \tan \theta = \sin 2\theta (1 - \sin \theta) \tan \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta (1 - \sin \theta) \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)$$

$$PQ = 2DQ = 4 \sin^2 \theta (1 - \sin \theta)$$

$t = \sin \theta$ とおくと, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より, t の変域は $0 < t < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$PQ = 4t^2(1-t) = f(t)$$

$$f'(t) = 8t - 12t^2 = -12t \left(t - \frac{2}{3} \right)$$

$f(t)$ の増減表

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	$\frac{16}{27}$	↘	

$$\text{ゆえに } \underline{\underline{\max PQ = \frac{16}{27}}}$$

(3) $t = \sin \theta = \frac{2}{3}$

$$OA \text{ の傾き } \tan \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

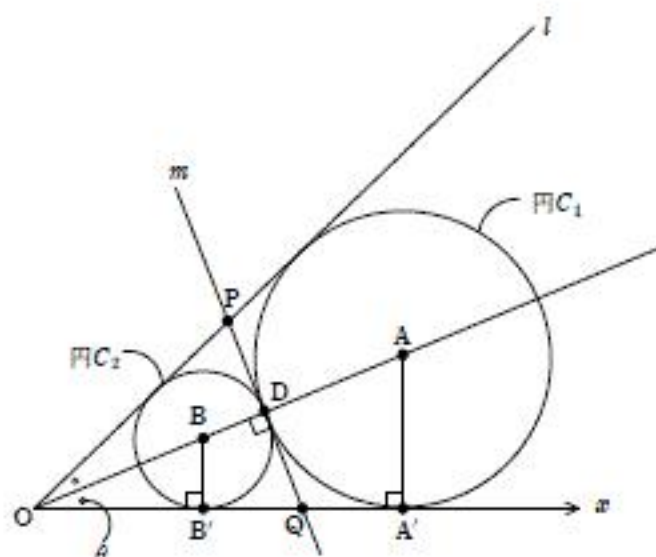
$$OA \perp m \text{ より, } m \text{ の傾き } -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\triangle ODQ$ において,

$$\begin{aligned} OQ &= \frac{OD}{\cos \theta} \leftarrow OD = \sin 2\theta (1 - \sin \theta) = 2 \sin \theta \cos \theta (1 - \sin \theta) \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin \theta) \\ &= \frac{4}{9} \text{ (Qの} x \text{座標)} \end{aligned}$$

ゆえに m の方程式は

$$\underline{\underline{y = -\frac{\sqrt{5}}{2} \left(x - \frac{4}{9} \right)}}$$



[3]

(1)

$$\overrightarrow{OP} = t\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{1}{2}\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\}$$

(2) $OM = BM$ より,

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{BM}|^2 = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}|^2$$

$$\therefore |\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2$$

$$\therefore 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}|^2 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$|\overrightarrow{OB}| = b$ とおくと $\textcircled{1}$ の左辺は

$$\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot \vec{b} = t + (1-t)b^2 + t \quad (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1)$$

ゆえに $\textcircled{1}$ より,

$$(1-t)b^2 + 2t = b^2 \quad \therefore tb^2 = 2t$$

$$t \neq 0 \text{ より, } b^2 = 2 \quad \therefore \underline{b = \sqrt{2}} (= OB)$$

(3) $OM = AM = BM = CM$ である.

$$OM = AM \text{ より, } \textcircled{1} \text{ と同様にして, } 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|^2$$

$|\overrightarrow{OA}| = a$ とおいて計算すると、

$$ta^2 + (1-t) + t = a^2 \quad \therefore (1-t)a^2 = 1$$

$$\therefore a^2 = \frac{1}{1-t} (>0) \quad \therefore a = \sqrt{\frac{1}{1-t}}$$

$$\text{また } OM = CM \text{ より, } 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OC}|^2$$

$|\overrightarrow{OC}| = c$ とおいて計算すると、

$$tc^2 + (1-t) + t = c^2 \quad \therefore (1-t)c^2 = 1$$

$$\therefore c^2 = \frac{1}{1-t} (>0) \quad \therefore c = \sqrt{\frac{1}{1-t}}$$

ゆえに $a = c$ である.

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = b^2 + a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2 \quad \left(\begin{array}{l} b = \sqrt{2} \\ \because \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \end{array} \right)$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 = c^2 + b^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} = c^2$$

これと $a = c$ より $AB = BC$

よって三辺相等で $\triangle OAB \equiv \triangle OCB$ (終)

[4]

(1) $x > 0$ において

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-x} + 2\sqrt{x} \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^{-x}(1-2x)}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2} \text{ より } a = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^{-x}(2x-3)\sqrt{x} - e^{-x}(1-2x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} \\ &= \frac{e^{-x}(4x^2 - 4x - 1)}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

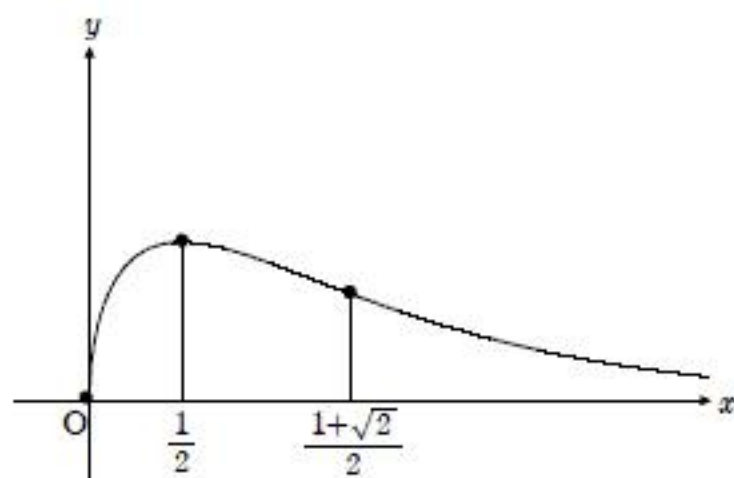
$$f''(x) = 0 \iff x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \text{ より } b = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

$f(x)$ の増減凹凸表

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$	0	↗		↘		↘

問題文より $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

$f(x)$ のグラフ



(2)

$$\begin{aligned} V(k) &= \int_0^k x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right)' dx \\ &= \left[-\frac{x}{2} e^{-2x} \right]_0^k + \frac{1}{2} \int_0^k e^{-2x} dx \\ &= -\frac{k}{2} e^{-2k} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^k \\ &= -\frac{k}{2} e^{-2k} - \frac{1}{4} (e^{-2k} - 1) \\ &= \underline{-\frac{2k+1}{4} e^{-2k} + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

(3) 求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_a^b (f(x))^2 dx &= 4\pi \int_a^b x e^{-2x} dx \leftarrow \int_a^b = \int_0^b - \int_0^a \\ &= 4\pi \{V(b) - V(a)\} \\ &= \pi \{-(2b+1)e^{-2b} + (2a+1)e^{-2a}\} \\ &= \underline{\pi \{2e^{-1} - (2+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}\}} \end{aligned}$$

[5]

頂角 θ_n の二等辺三角形 $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ を T_n とする.

P_{n+2} のまわりの平角を考えると,

$(T_n \text{の底角}) + (T_{n+1} \text{の底角}) + (T_{n+2} \text{の頂角}) = \pi$ より,

$$\begin{aligned}\frac{\pi - \theta_n}{2} + \frac{\pi - \theta_{n+1}}{2} + \theta_{n+2} &= \pi \\ \therefore \theta_{n+2} &= \frac{1}{2}\theta_{n+1} + \frac{1}{2}\theta_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \theta \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{より}, \theta_3 = \frac{1}{2}\theta_2 + \frac{1}{2}\theta_1 = \underline{\underline{\frac{3}{4}\theta}}$$

$$(2) \textcircled{1} \text{より}, \theta_{n+2} + \frac{\theta_{n+1}}{2} = \theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2}$$

ゆえに, $\left\{ \theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2} \right\}$ は定数数列だから,

$$\theta_{n+1} + \frac{\theta_n}{2} = \theta_2 + \frac{\theta_1}{2} = \theta \quad (\text{一定}) \quad (\text{終})$$

(3) 上に続けて

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= -\frac{1}{2}\theta_n + \theta \\ \therefore \theta_{n+1} - \frac{2}{3}\theta &= -\frac{1}{2}\left(\theta_n - \frac{2}{3}\theta\right)\end{aligned}$$

ゆえに, $\left\{ \theta_n - \frac{2}{3}\theta \right\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列だから,

$$\begin{aligned}\theta_n - \frac{2}{3}\theta &= \left(\theta_1 - \frac{2}{3}\theta\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore \theta_n &= \frac{2}{3}\theta + \frac{1}{3}\theta \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n &= \underline{\underline{\frac{2}{3}\theta}}\end{aligned}$$

[6]

(1) $|z-1|=|z+1|$ を同値に変形すると,

$$|z-1|^2 = |z+1|^2$$

$$(z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1)$$

$$z\bar{z} - z - \bar{z} + 1 = z\bar{z} + z + \bar{z} + 1$$

$$z + \bar{z} = 0$$

$$\operatorname{Re}(z) = 0$$

ゆえに z の全体は虚軸である.

(注) 2 点 $1, -1$ から等距離にある点の軌跡と考えることもできる.

(2) $w = \frac{z+1}{z}$ より, $wz = z+1$ $(w-1)z = 1$

$$w \neq 1 \text{ であり, } z = \frac{1}{w-1}$$

z が原点を除く虚軸上にある条件は

$$z = -\bar{z} \text{ かつ } z \neq 0 \text{ より,}$$

$$\frac{1}{w-1} = -\frac{1}{\bar{w}-1} \text{ かつ } \frac{1}{w-1} \neq 0 \text{ 常に成立.}$$

$w \neq 1$ の下でこれを同値変形すると,

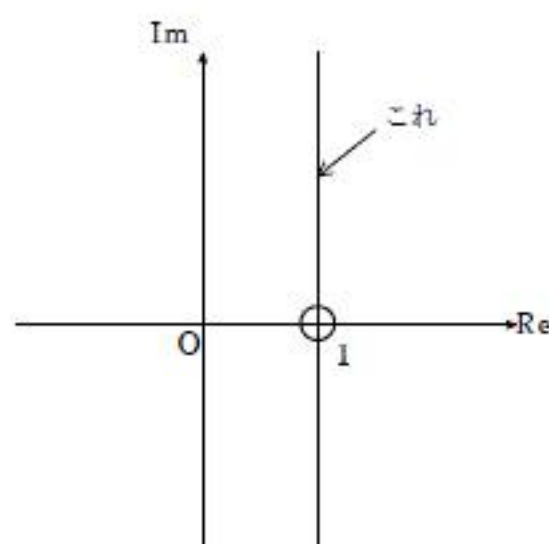
$$\bar{w}-1 = -w+1$$

$$\bar{w}+w = 2 \quad \therefore \operatorname{Re}(w) = 1$$

ゆえに w の描く図形は

「点 1 を通り実軸に垂直な直線の点 1 を除く部分」

であり図のようになる.



(3) $a > 0$, $w = \frac{z+1}{z-a}$ より,

$$wz - aw = z+1$$

$$(w-1)z = aw+1 \quad \leftarrow w=1 \text{ とすると } 0=a+1 \text{ となり不適.}$$

$$w \neq 1 \text{ であり, } z = \frac{aw+1}{w-1}$$

z が虚軸上にある条件は $z = -\bar{z}$ より,

$$\frac{aw+1}{w-1} = -\frac{a\bar{w}+1}{\bar{w}-1}$$

これを $w \neq 1$ の下で同値変形すると,

$$(aw+1)(\bar{w}-1) = -(a\bar{w}+1)(w-1)$$

$$2aw\bar{w} + (1-a)w + (1-a)\bar{w} - 2 = 0$$

$$ww + \frac{1-a}{2a}w + \frac{1-a}{2a}\bar{w} - \frac{1}{a} = 0$$

$$\left(w + \frac{1-a}{2a}\right)\left(\bar{w} + \frac{1-a}{2a}\right) = \frac{a^2 + 2a + 1}{4a^2}$$

$$\left|w - \frac{a-1}{2a}\right|^2 = \left(\frac{1+a}{2a}\right)^2$$

$$\left|w - \frac{a-1}{2a}\right| = \frac{1+a}{2a}$$

ゆえに, w の描く図形は

$$\underline{\text{中心 } \frac{a-1}{2a}, \text{半径 } \frac{a+1}{2a} \text{ の円の点 } 1 \text{ を除く部分}}$$