

[1]

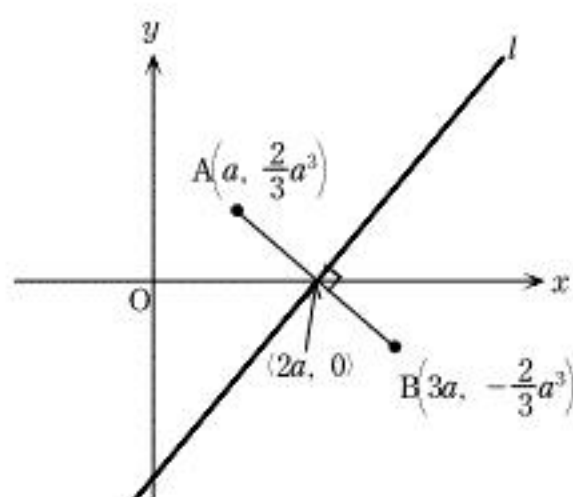
(1)

$$y = \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3 \quad \cdots \cdots ①$$

$$y = -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3 \quad \cdots \cdots ②$$

①, ②の交点の x 座標は $a > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}ax^2 - 2a^2x + \frac{7}{3}a^3 &= -\frac{2}{3}ax^2 + 2a^2x - \frac{2}{3}a^3 \\ \Leftrightarrow ax^2 - 4a^2x + 3a^3 &= 0, x^2 - 4ax + 3a^2 = 0 \\ (x-a)(x-3a) &= 0 \\ \therefore A\left(a, \frac{2}{3}a^3\right), B\left(3a, -\frac{2}{3}a^3\right) &\quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) 線分 AB の中点は $(2a, 0)$, 直線 AB の傾きは $\frac{-\frac{4}{3}a^3}{2a} = -\frac{2}{3}a^2$

よって, l の傾き m は, $m \cdot \left(-\frac{2}{3}a^2\right) = -1$ より, $m = \frac{3}{2a^2}$

$$\therefore l: y = \frac{3}{2a^2}(x - 2a) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) $l: 2a^2y - 3x + 6a = 0$

距離公式より,

$$d = \frac{6a}{\sqrt{4a^4 + 9}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{4a^2 + \frac{9}{a^2}}}$$

相加・相乗平均より,

$$4a^2 + \frac{9}{a^2} \geq 2\sqrt{4\cancel{a^2} \cdot \frac{9}{\cancel{a^2}}} = 12$$

$$d = \frac{6}{\sqrt{4a^2 + \frac{9}{a^2}}} \leq \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$$

等号は $4a^2 = \frac{9}{a^2}$, $a^4 = \frac{9}{4}$, $a = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき成り立ち,

このとき, d は最大になる.

$$\therefore a = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

別解

$$f(a) = \frac{6a}{\sqrt{4a^4 + 9}} \text{ とおくと,}$$

$$f'(a) = -24 \frac{a^4 - \frac{9}{4}}{(\sqrt{4a^4 + 9})^3}$$

$a > 0$ で $f'(a) = 0$ となる a は $a^4 = \frac{9}{4}$, $a = \frac{\sqrt{6}}{2}$ で, このとき $f(a)$ は最大になる.

$$\therefore a = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

〔2〕 $0 < \beta < 1, m > 0$

$$(1) \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$x = \beta, -\beta$ が $f'(x) = 0$ の異なる 2 実解であるから、

$$\begin{cases} \beta + (-\beta) = -\frac{2}{3}a \\ -\beta^2 = \frac{b}{3} \end{cases} \quad \therefore a = 0, b = -3\beta^2 \quad \cdots \cdots (ア)$$

次に、 $f(-1) = f(\beta) = -m, f(1) = f(-\beta) = m$ より、

$$\begin{cases} \beta^3 + b\beta + c = -1 - b + c = -m \\ -\beta^3 - b\beta + c = 1 + b + c = m \\ -b + c - 1 = -m \\ b + c + 1 = m \end{cases}$$

辺々をたして、

$$2c = 0, c = 0, b = m - 1$$

$$\iff m = -3\beta^2 + 1 \quad \cdots \cdots (イ)$$

$$\beta^3 + b\beta = -m \quad \cdots \cdots (ウ)$$

(ア)、(イ)式を(ウ)式に代入して、

$$\beta^3 - 3\beta^3 = 3\beta^2 - 1, 2\beta^3 + 3\beta^2 - 1 = 0$$

$$(\beta + 1)(2\beta^2 + \beta - 1) = 0$$

$$(\beta + 1)(2\beta - 1)(\beta + 1) = 0$$

$0 < \beta < 1$ より、

$$\beta = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}, m = \frac{1}{4}$$

以上より、

$$\underline{a = 0, b = -\frac{3}{4}, c = 0, \beta = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4}} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) (1)より、

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x, f(1) = \frac{1}{4}, f(-1) = -\frac{1}{4}$$

$-1 \leq x \leq 1$ となる x で、

$$f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$$

$g(x) = f(x) - h(x)$ を代入して、

$$f(-1) \leq f(x) - h(x) \leq f(1)$$

$$\therefore f(x) - f(1) \leq h(x) \leq f(x) - f(-1) \quad \cdots \cdots (*)$$

ここで、

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) = \cancel{x^3} - \frac{3}{4}x - (\cancel{x^3} + px^2 + qx + r) \\ &= -px^2 - \left(q + \frac{3}{4}\right)x - r \end{aligned}$$

・(*)に、 $x = -1, 1$ を代入して、

$$\begin{cases} h(-1) \leq 0, -p + q - r + \frac{3}{4} \leq 0 & \cdots \cdots ① \\ h(1) \geq 0, -p - q - r - \frac{3}{4} \geq 0 & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

①、②より、

$$\begin{aligned} -p + q + \frac{3}{4} &\leq r \leq -p - q - \frac{3}{4} \\ -\cancel{p} + q + \frac{3}{4} &\leq -\cancel{p} - q - \frac{3}{4}, \underline{q + \frac{3}{4} \leq 0} \quad \cdots \cdots ③ \end{aligned}$$

・(*)に、 $x = -\beta, \beta$ を代入して、

$$h(-\beta) \geq f(-\beta) - f(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$h(\beta) \leq f(\beta) - f(-1) = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right) \\ \parallel \\ h(-\beta) \geq 0, -\frac{p}{4} + \frac{1}{2}q - r + \frac{3}{8} \geq 0 & \cdots \cdots ④ \\ h(\beta) \leq 0, -\frac{p}{4} - \frac{1}{2}q - r - \frac{3}{8} \leq 0 & \cdots \cdots ⑤ \\ \parallel \\ \left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

④、⑤より

$$\begin{aligned} -\frac{p}{4} - \frac{1}{2}q - \frac{3}{8} &\leq r \leq -\frac{p}{4} + \frac{1}{2}q + \frac{3}{8} \\ -\cancel{p}/4 - \frac{1}{2}q - \frac{3}{8} &\leq -\cancel{p}/4 + \frac{1}{2}q + \frac{3}{8} \\ \underline{0 \leq q + \frac{3}{4}} &\quad \cdots \cdots ⑥ \end{aligned}$$

③かつ⑥より、

$$q + \frac{3}{4} = 0 \quad \therefore \underline{q = -\frac{3}{4}}$$

このとき、①、②より、

$$\begin{aligned} -r &\leq p, p \leq -r \\ \therefore p &= -r, p + r = 0 \end{aligned}$$

④、⑤より、

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}p &\geq 0, \frac{3}{4}p \leq 0 \\ \therefore p &= 0, \underline{p = r = 0} \end{aligned}$$

以上より、

$$\underline{h(x) = 0} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

補足説明

$h(x)$ は(*)より、

$$f(x) - \frac{1}{4} \leq h(x) \leq f(x) + \frac{1}{4} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

を満たす関数で、

$$h(x) = -px^2 - \left(q + \frac{3}{4}\right)x - r$$

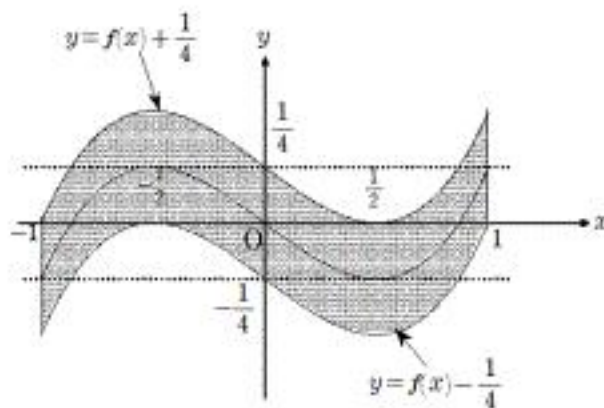
$y = h(x)$ が $-1 \leq x \leq 1$ の区間で、図の網目部分に含まれるように $h(x)$ を決定することになる。

$p \neq 0$ のとき、 $y = h(x)$ は 2 次関数で網目部分に含まれることは無理。

$p = 0$ のとき、

$$h(x) = -\left(q + \frac{3}{4}\right)x - r$$

は直線であり、網目部分に含まれるのは $y = 0$ のみである。



$$[3] \quad a_1 = 1, a_2 = 3, \underline{a_{n+2}} = 3a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3a_n^2 + \underline{a_{n+1}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(1)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \iff \underline{a_{n+2} - a_{n+1}} &= 3(a_{n+1}^2 - 2a_{n+1}a_n + a_n^2) \\ &= 3(a_{n+1} - a_n)^2 \quad \therefore b_{n+1} = 3b_n^2 \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

よって,

$$b_n \quad (n=2, 3, \cdots) \geq 0, b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2 \geq 0$$

以上より, $n \geq 1$ で, $b_n \geq 0$ ■

(2) $b_n \quad (n=1, 2, \cdots)$ の一の位の数 は 2 である.

($\because$) $n=1$ のとき, $b_1 = 2$ より成り立つ.

$n=k$ のとき, 成り立つと仮定する. すなわち,

$$b_k = 10p + 2 \quad (p: 0 \text{ 以上の整数})$$

$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= 3b_k^2 = 3(10p+2)^2 = 3(100p^2 + 40p + 4) \\ &= 10(30p^2 + 12p + 1) + 2 \end{aligned}$$

$30p^2 + 12p + 1$ は自然数より, b_{k+1} の一の位の数 は 2 となり, 成り立つ.

以上より, すべての自然数 n で, b_n の一の位の数 は 2 ■

(3) (2)より, $b_n = 10s_n + 2$ (s_n は 0 以上の整数) と表せる.

$a_{n+1} - a_n = 10s_n + 2$ より, 数列 $\{a_n\}$ の階差数列は $\{10s_n + 2\}$ であるから,

$$\begin{aligned} a_{2017} &= a_1 + \sum_{k=1}^{2016} (10s_k + 2) \\ &= 1 + 10 \sum_{k=1}^{2016} s_k + 2 \cdot 2016 \\ &= 10 \left(\sum_{k=1}^{2016} s_k + 403 \right) + 1 \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{2016} s_k + 403$: 自然数より, a_{2017} の一の位の数 は 1 $\cdots \cdots$ (答)

[4]

(1)

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10$$

$$t = x + \frac{1}{x} \text{ とおくと, } x > 0 \text{ より, } t \geq 2$$

$$2t^2 - 9t + 10 = 0 \iff (t-2)(2t-5) = 0 \text{ となる } t \text{ は,}$$

$$t = 2, \frac{5}{2}$$

$$\cdot t = 2 \iff x + \frac{1}{x} = 2, x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \text{ から, } x = 1$$

$$\cdot t = \frac{5}{2} \iff x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$(x-2)(2x-1) = 0 \text{ から, } x = 2, \frac{1}{2}$$

以上より,

$$\underline{x = 1, 2, \frac{1}{2}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2)

$$f(x) = 2x^2 - 9x + 14 - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^2} \quad (x > 0)$$

$$f'(x) = 4x - 9 + \frac{9}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

$$= \frac{1}{x^3}(4x^4 - 9x^3 + 9x - 4)$$

$$= \frac{1}{x^3}\{4(x^2-1)(x^2+1) - 9x(x^2-1)\}$$

$$= \frac{1}{x^3}(x+1)(x-1)(4x^2-9x+4)$$

$$f'(x) = 0 \text{ となる } x \text{ は, } x > 0 \text{ より, } x = 1 \text{ と } 4x^2 - 9x + 4 = 0 \text{ の解 } x = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}$$

$$\alpha = \frac{9 - \sqrt{17}}{8}, \beta = \frac{9 + \sqrt{17}}{8} \text{ とおくと,}$$

$$f(\alpha) = 2\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 9\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + 10$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{9 - \sqrt{17}}{8} + \frac{8}{9 - \sqrt{17}} = \frac{(9 - \sqrt{17}) + (9 + \sqrt{17})}{8} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore f(\alpha) = 2\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 9\left(\frac{9}{4}\right) + 10 = -\frac{1}{8}$$

同様に,

$$f(\beta) = -\frac{1}{8}$$

増減表をかくと,

x	0		α		1		β	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	0	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$\text{極大値 } f(1) = 0$$

$$\text{極小値 } f\left(\frac{9 \pm \sqrt{17}}{8}\right) = -\frac{1}{8} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) 求める面積を S とすると, S は右図の斜線部分の面積に等しく,

$$S = \int_{\frac{1}{2}}^2 \{-f(x)\} dx$$

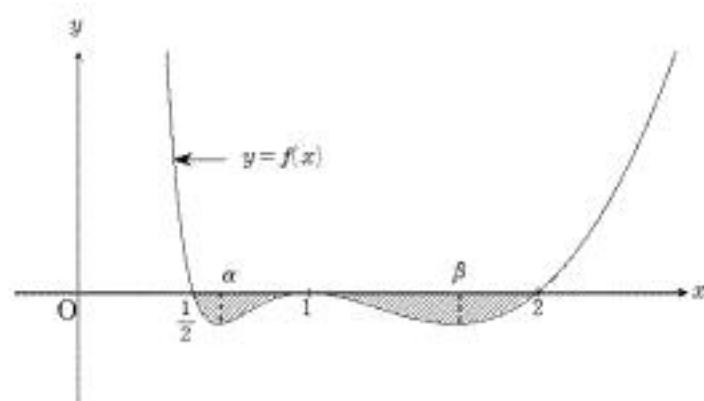
$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(-2x^2 + 9x - 14 + \frac{9}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 14x + 9\log|x| + \frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= \left(-\frac{16}{3} + 18 - 28 + 1\right) - \left(-\frac{1}{12} + \frac{9}{8} - 7 + 4\right) + 9\left(\log 2 - \log \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{43}{3} + \frac{47}{24} + 18\log 2$$

$$= 18\log 2 - \frac{99}{8} \quad \dots\dots(\text{答})$$



[5]

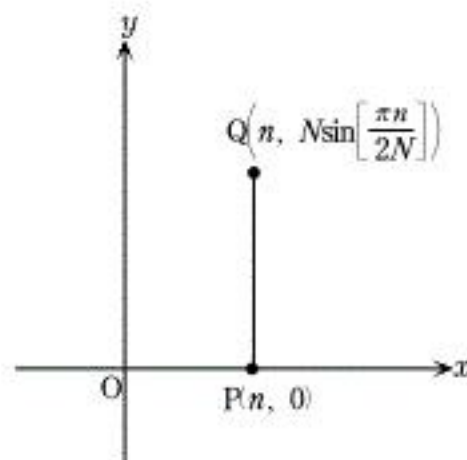
(1) $P(n, 0), Q\left(n, N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right)\right)$ とおくと, 線分 PQ 上で

y が整数となるものは, $y = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right\rfloor$
となるから,

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq n \leq N \text{ より, } 0 \leq \frac{n}{N} \leq 1 \\ \therefore \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \geq 0 \end{array} \right)$$

その個数は,

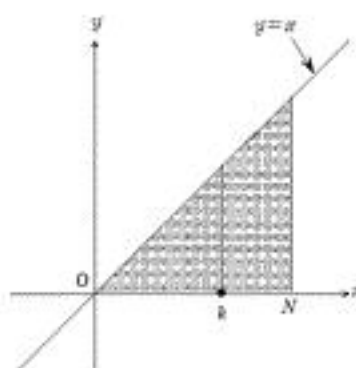
$$\left\lfloor N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right\rfloor + 1 \text{ 個} \quad \dots\dots(\text{答})$$



(2) $x = k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) 上で

y が整数であるものは, $y = 0, 1, 2, \dots, k$ で, $k+1$ 個
求める格子点の個数 $A(N)$ は,

$$A(N) = \sum_{k=0}^N (k+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$



(3) (1)より, $x = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$) 上の格子点の個数は, $\left\lfloor N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right\rfloor + 1$ であるから,
 $n = 0, 1, 2, \dots, N$ をすべてたしたものが $B(N)$ である.

$$\begin{aligned} \therefore B(N) &= \sum_{n=0}^N \left\lfloor N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right\rfloor + 1 = N+1 + \sum_{n=0}^N \left\lfloor N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right\rfloor \\ &= N+1 + \sum_{n=1}^N \left\lfloor N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right\rfloor \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) - 1 &< \left\lfloor N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right\rfloor \leq N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \\ \therefore \sum_{n=1}^N N \sin\frac{\pi n}{2N} - N &< \sum_{n=1}^N \left\lfloor N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \right\rfloor \leq \sum_{n=1}^N N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) \end{aligned}$$

辺々に, $N+1$ をたして,

$$\sum_{n=1}^N N \sin\frac{\pi n}{2N} + 1 < B(N) \leq \sum_{n=1}^N N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) + N+1$$

辺々に, $\frac{1}{A(N)} = \frac{2}{(N+1)(N+2)}$ を乗じて,

$$\frac{2}{(N+1)(N+2)} \sum_{n=1}^N N \sin\frac{\pi n}{2N} + \frac{2}{(N+1)(N+2)} < \frac{B(N)}{A(N)} \leq \frac{2}{(N+1)(N+2)} \sum_{n=1}^N N \sin\left(\frac{\pi n}{2N}\right) + \frac{2}{N+2} \quad \dots\dots(*)$$

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{(N+1)(N+2)} \sum_{n=1}^N N \sin\frac{\pi n}{2N} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{N}\right)\left(1 + \frac{2}{N}\right)} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n}{N}\right) \\ &= 2 \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) dx = 2 \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) \right]_0^1 = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

となるから, (*) で $N \rightarrow \infty$ とすると, はさみうちの原理より,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B(N)}{A(N)} = \frac{4}{\pi} \quad \dots\dots(\text{答})$$

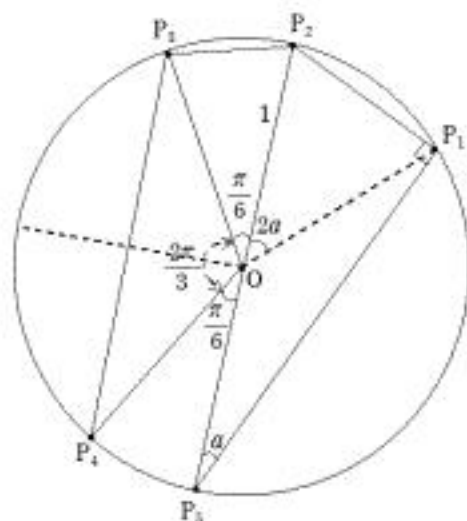
(1)

$$(I) \quad (\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{w_2 - w_1}{w_5 - w_1} \right)^2 = -\left(\frac{\sin a}{\cos a} \right)^2, \frac{w_2 - w_1}{w_5 - w_1} = \pm (\tan a)i$$

よって,

$$\arg \frac{w_2 - w_1}{w_5 - w_1} = \pm \frac{\pi}{2} \quad \therefore \angle P_5 P_1 P_2 = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$



(2) (1)より,

$$\left| \frac{w_2 - w_1}{w_5 - w_1} \right| = \tan a \quad \therefore \angle P_2 P_5 P_1 = a$$

また, (II) の条件から, $\frac{w_3}{w_2}$ と $-\frac{w_4}{w_2}$ は $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \quad \dots\dots(1)$ の解であり, P_2, P_3, P_4 は半円上に並ぶことから,①の解 $z = \frac{\sqrt{3} \pm i}{2}$ で,

$$\frac{w_3}{w_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{w_4}{w_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\frac{w_4}{w_2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

よって,

$$\angle P_2 O P_3 = \frac{\pi}{6}, \angle P_3 O P_4 = \frac{2\pi}{3}, \angle P_4 O P_5 = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \left\{ \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} + (2 \sin a)(2 \cos a) \right\} = \underline{\sin 2a + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) $\triangle P_1 P_2 P_5$ は直角三角形で,

$$w_2 = -w_5 \quad \therefore w_2 + w_5 = 0$$

また, $\triangle O P_3 P_4$ で $w_3 + w_4$ は w_2 を原点のまわりに $\frac{\pi}{2}$ 回転したものに等しく, $\triangle O P_1 P_2$ で w_1 は w_2 を原点のまわりに $-2a$ 回転したものに等しい.よって, $w_3 + w_4 = iw_2, w_1 = (\cos 2a - i \sin 2a)w_2$ とおけ,

$$\begin{aligned} \therefore \left| \underline{w_1} + \underline{w_2} + \underline{w_3} + \underline{w_4} + \underline{w_5} \right| &= |(\cos 2a - i \sin 2a + i)w_2| \\ &= |\cos 2a + (1 - \sin 2a)i| \underbrace{|w_2|}_{1} \\ &= \sqrt{\cos^2 2a + (1 - \sin 2a)^2} = \sqrt{2(1 - \sin 2a)} \end{aligned}$$

$$\therefore R^2 + 2S = 2 - \cancel{2 \sin 2a} + \cancel{2 \sin 2a} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となり, $R^2 + 2S$ は a によらず一定である. ■