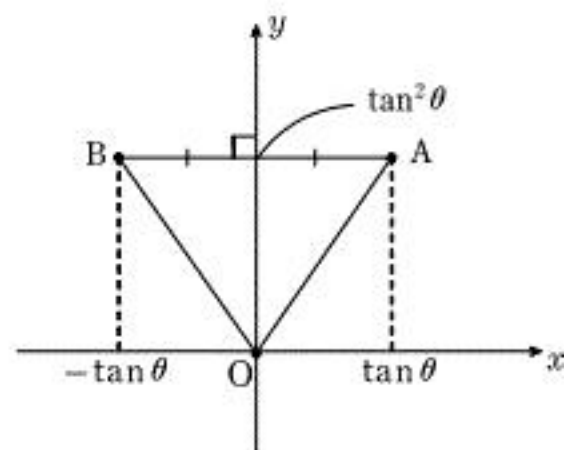


1.]

- (1) $\tan \theta > 0$ より点 A は第 1 象限にあって、
 $\triangle OAB$ は y 軸に関して対称である。 $\triangle OAB$ の
 内心 P、外心 Q は y 軸上にある。



<内心 P について>

AB の中点を M とすると

$$OP:PM = AO:AM$$

である.ここで

$$(\text{OA の傾き}) = \frac{\tan^2 \theta}{\tan \theta} = \tan \theta$$

より $\overline{OA}$ の方向角は θ で、 $AB \parallel x$ 軸も考えると

$$\angle OAB = \theta$$

ゆえに $\triangle OAM$ において

$$AO:AM = 1:\cos \theta$$

よって

$$OP:PM = 1:\cos \theta$$

であり

$$p = OM \cdot \frac{1}{1 + \cos \theta}$$

$$\begin{aligned} OM &= \tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

したがって

$$p = \frac{1 - \cos \theta}{\cos^2 \theta} \quad (\text{答})$$

<外心 Q について>

線分 OA の垂直二等分線 l と y 軸の交点が Q である. l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{\tan \theta} \left(x - \frac{\tan \theta}{2} \right) + \frac{\tan^2 \theta}{2} \\ &= -\frac{1}{\tan \theta} x + \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \theta) \end{aligned}$$

ゆえに

$$q = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \theta) = \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \quad (\text{答})$$

(2)

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx \\ &= \frac{1}{6} (2\sqrt{a})^3 = \frac{4}{3} a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{S(p)}{S(q)} &= \frac{\frac{4}{3} p^{\frac{3}{2}}}{\frac{4}{3} q^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= (2(1 - \cos \theta))^{\frac{3}{2}} \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①のとり得る値の範囲を求める.

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$0 < \cos \theta < 1$$

$$0 < 2(1 - \cos \theta) < 2$$

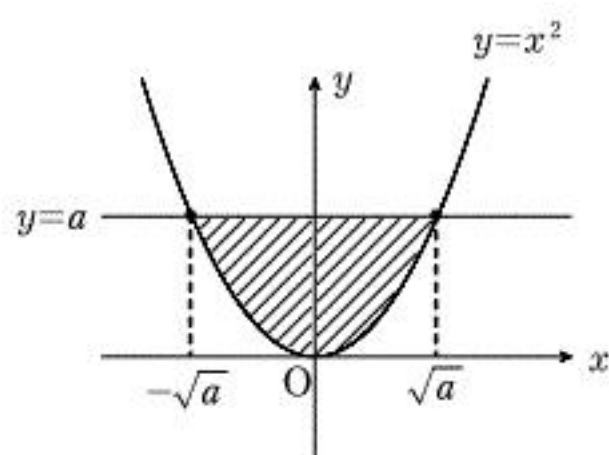
$$0 < (2(1 - \cos \theta))^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{3}{2}} (= \sqrt{8})$$

ゆえに①が整数ならばその値は 1 か 2 であり

$$(2(1 - \cos \theta))^{\frac{3}{2}} = 1, 2$$

$$2(1 - \cos \theta) = 1, 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, 1 - 2^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{答})$$



(2)

(1)

$$y = x^2 + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y = px \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$y = qx \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②から y を消去すると

$$x^2 + (a - p)x + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

この2次方程式が重解をもつから

$$(a - p)^2 - 4b = 0$$

$$a^2 - 2ap + p^2 - 4b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

同様に①, ③から

$$x^2 + (a - q)x + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$(a - q)^2 - 4b = 0$$

$$a^2 - 2aq + q^2 - 4b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑤, ⑦から a, b を求める. ⑤ - ⑦より

$$-2(p - q)a + p^2 - q^2 = 0$$

$p - q \neq 0$ だから

$$a = \frac{p^2 - q^2}{2(p - q)} = \frac{p + q}{2} \quad (\text{答})$$

⑦の上の式より

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{4}(a - q)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{p + q}{2} - q\right)^2 \\ &= \frac{1}{16}(p - q)^2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(2) ④の重解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(a - p)}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{p + q}{2} - p\right) \\ &= \frac{p - q}{4} \end{aligned}$$

であり, これが C と l_1 の接点の x 座標である.

同様に⑥から

$$x = \frac{-(a - q)}{2} = \frac{-p + q}{4}$$

が C と l_2 の接点の x 座標である.

$\alpha = \frac{p - q}{4}$ とおくと

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\alpha}^0 ((x^2 + ax + b) - qx) dx + \int_0^{\alpha} ((x^2 + ax + b) - px) dx \\ &= \int_{-\alpha}^0 (x + \alpha)^2 dx + \int_0^{\alpha} (x - \alpha)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x + \alpha)^3 \right]_{-\alpha}^0 + \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_0^{\alpha} \\ &= \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{3}\alpha^3 = \frac{2}{3}\alpha^3 \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{p - q}{4}\right)^3 = \frac{1}{96}(p - q)^3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $l_1 \perp l_2$ より

$$pq = -1 \quad q = -\frac{1}{p}$$

ゆえに

$$S = \frac{1}{96}\left(p + \frac{1}{p}\right)^3$$

ここで $p > 0$ より

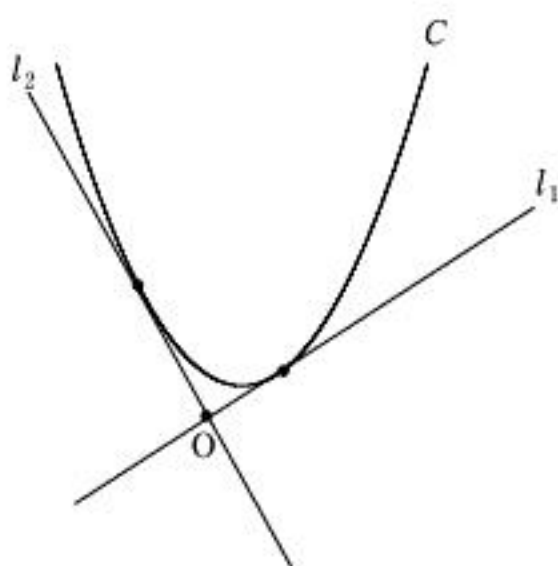
$$p + \frac{1}{p} \geq 2\sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 2$$

であり, $p = 1$ のときに

$$p + \frac{1}{p} = 2$$

となる. 以上より S の最小値は

$$\frac{1}{96} \cdot 2^3 = \frac{1}{12} \quad (\text{答})$$



(1)

$$\triangle OQ_1P_2 \text{ で } OP_2 = 2OQ_1$$

これらより $OP_2 = 4OP_1$

同様に $OP_{n+1} = 4OP_n$ がすべての n で成り立つから

$$\text{OP}_n = 4^{n-1} \text{OP}_1$$

ゆえに

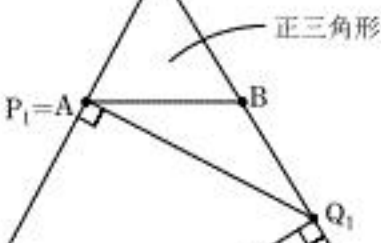
$$\overrightarrow{OP_n} = 4^{n-1} \vec{a} \quad (\text{答})$$

同様にして

$$\begin{aligned} \text{OQ}_n &= 4^{n-1} \text{OQ}_1 \\ &= 2 \cdot 4^{n-1} \text{OB} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{OQ_n} = 2 \cdot 4^{n-1} \vec{b} \quad (\text{答})$$



(2)

$$\overrightarrow{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ_n} = 2 \cdot 4^{n-1} \vec{b} \text{ 上 } \eta \quad \vec{b} = \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}} \overrightarrow{OQ_n}$$

$$\overrightarrow{\text{OP}_{n+1}} = 4^n \vec{a} \text{ より } \vec{a} = \frac{1}{4^n} \overrightarrow{\text{OP}_{n+1}}$$

これらを最初の式に代入すると

$$\overrightarrow{OR} = \frac{x}{4^n} \overrightarrow{OP_{n+1}} + \frac{y}{2 \cdot 4^{n-1}} \overrightarrow{OQ_n}$$

ゆえに R が線分 $Q_n P_{n+1}$ 上にあるための条件は

$$\begin{cases} \frac{x}{4^n} + \frac{y}{2 \cdot 4^{n-1}} = 1 \\ \frac{x}{4^n} \geq 0 \\ \frac{y}{2 \cdot 4^{n-1}} \geq 0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} x = 4^n - 2y & (\text{答}) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

x を消去すると

$$\begin{cases} x = 4^n - 2y \\ 4^n - 2y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4^n - 2y \\ 0 \leq y \leq 2 \cdot 4^{n-1} \end{cases}$$

x, y は整数だから

$$y = 0, 1, 2, \dots, 2 \cdot 4^{n-1}$$

の各々に対して x がただ 1 つ対応し，組 (x, y) の個数は

$$2 \cdot 4^{n-1} + 1 \quad (\text{答})$$

(3) (2)と同じ $\overrightarrow{OR} = x\vec{a} + y\vec{b}$ を用いると, R が $\triangle OP_{n+1}Q_n$ の周または

内部にあるための条件は

$$\begin{cases} \frac{x}{4^n} + \frac{y}{2 \cdot 4^{n-1}} \leq 1 \\ \frac{x}{4^n} \geq 0 \\ \frac{y}{2 \cdot 4^{n-1}} \geq 0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} x \leq 4^n - 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

これを満たす整数 x, y の組の個数を求めればよい. 図を参考にして

$$y = 0, 1, 2, \dots, 2 \cdot 4^{n-1}$$

の各々に対して

$$0 \leq x \leq 4^n - 2y$$

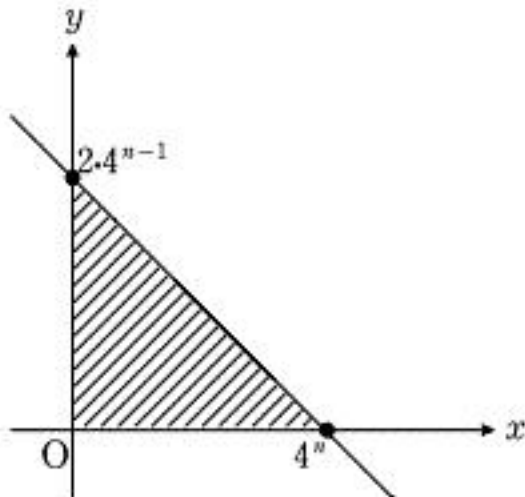
$$x = 0, 1, 2, \dots, 4^n - 2y$$

より x は $4^n - 2y + 1$ 個対応する.

ゆえに

$$\begin{aligned} & \sum_{y=0}^{2 \cdot 4^{n-1}} (4^n - 2y + 1) \\ &= \frac{(4^n + 1) + 1}{2} \cdot (2 \cdot 4^{n-1} + 1) \\ &= (2 \cdot 4^{n-1} + 1)^2 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

が求めるものである。



(4)

(1) $0 < x < \pi$ において

$$\frac{1}{\sqrt{2} \sin x} = \sqrt{2} (\sin x - \cos x)$$

$$1 = 2 \sin x (\sin x - \cos x)$$

$$1 = 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x$$

$$1 = 1 - \cos 2x - \sin 2x$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 0$$

$\cos 2x = 0$ では成り立たないから

$\cos 2x \neq 0$ であり

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + 1 = 0$$

$$\tan 2x = -1$$

$0 < 2x < 2\pi$ も考えて

$$2x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$x = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8} \quad (\text{答})$$

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2} \sin x}$ とおく.

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ で $f(x)$ は減少し,

$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ で $f(x)$ は増加する.

$g(x) = \sqrt{2} (\sin x - \cos x)$ とおく.

$g(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ より C_2 は曲線 $y = 2 \sin x$ を

x 軸方向に $\frac{\pi}{4}$ だけ平行移動したもの.

以上と(1)の結果より, C_1, C_2 の図は右のようになる.

ゆえに $\alpha = \frac{3\pi}{8}, \beta = \frac{7\pi}{8}$ として

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx - \pi \int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} g(x)^2 &= 2(\sin x - \cos x)^2 \\ &= 2(1 - 2 \sin x \cos x) \\ &= 2 - 2 \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx &= [2x + \cos 2x]_{\alpha}^{\beta} \\ &= 2(\beta - \alpha) + \cos 2\beta - \cos 2\alpha \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{7\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} \\ &= \pi + \sqrt{2} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2 \sin^2 x} dx$$

$t = \frac{\pi}{2} - x$ とおくと

$$\sin x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \cos t$$

となるから

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2 \sin^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{2 \cos^2 t} \cdot (-1) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{\cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{2} [\tan t]_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\tan \frac{\pi}{8} + \tan \frac{3\pi}{8} \right) \\ &\quad \left(\tan \left(-\frac{3\pi}{8} \right) = -\tan \frac{3\pi}{8} \right) \end{aligned}$$

ここで $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$ より

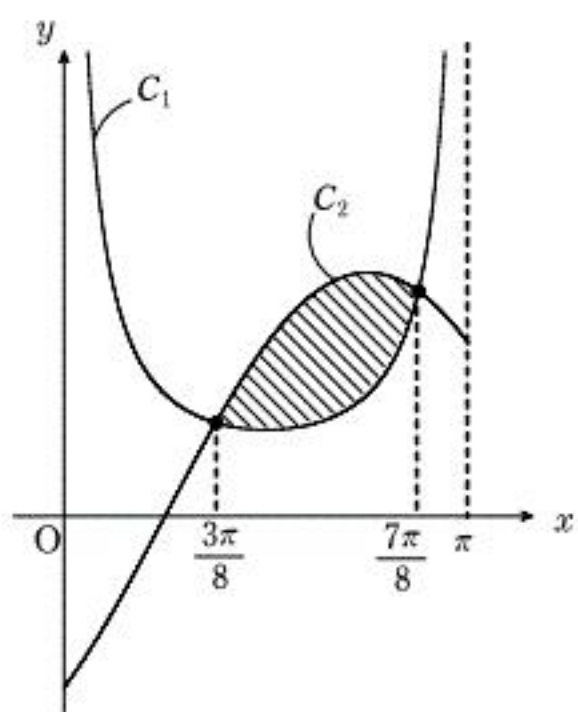
$$\tan \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{8}}$$

であり, $\theta = \frac{\pi}{8}$ として

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx &= \frac{1}{2} \left(\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin 2\theta} \\ &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

②, ③を①に代入すると

$$V = \pi(\pi + \sqrt{2}) - \pi \cdot \sqrt{2} = \pi^2 \quad (\text{終})$$



5]
(1)

$$\begin{aligned}f(\pi) &= \int_0^\pi \frac{4\pi}{t^2 + \pi^2} dt \\&= \int_0^\pi \frac{\frac{4}{\pi}}{\left(\frac{t}{\pi}\right)^2 + 1} dt \\&\quad \left(u = \frac{t}{\pi} \text{ と置換}\right) \\&= \int_0^1 \frac{\frac{4}{\pi}}{u^2 + 1} \cdot \pi du \\&= 4 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du \\&\quad (u = \tan \theta \text{ と置換}) \\&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\&= 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi \quad (\text{答})\end{aligned}$$

次に

$$f'(x) = \frac{4\pi}{x^2 + \pi^2} > 0$$

であり、 $x \geq \pi$ において $f'(x)$ は減少関数だから

$$f'(x) \leq f'(\pi) = \frac{2}{\pi}$$

ゆえに $x \geq \pi$ において

$$0 < f'(x) \leq \frac{2}{\pi}$$

が成り立つ. (終)

(2) 数学的帰納法で示す.

(I) $a_1 = c \geq \pi$ より

$a_1 \geq \pi$ である.

(II) 自然数 k に対して $a_k \geq \pi$ と仮定する.

$f'(x) > 0$ より $f(x)$ は増加関数だから

$$a_{k+1} = f(a_k) \geq f(\pi) = \pi$$

ゆえに $a_{k+1} \geq \pi$ である. (終)

(3) すべての n に対して

$$|a_{n+1} - \pi| \leq \frac{2}{\pi} |a_n - \pi| \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

であることを示す.

$a_n = \pi$ のときは

$$a_{n+1} = f(a_n) = f(\pi) = \pi$$

だから①は両辺とも 0 で成り立つ.

以下は $a_n \neq \pi$ のときを考える.

$f(x)$ について、 a_n と π の間の区間で平均値の定理を用いると

$$\frac{f(a_n) - f(\pi)}{a_n - \pi} = f'(\alpha) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\alpha \text{ は } a_n \text{ と } \pi \text{ の間にある} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

を満たす α が存在する.

$a_n \geq \pi$ と③より $\alpha > \pi$ だから

$$0 < f'(\alpha) \leq \frac{2}{\pi} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

である. ②を変形すると

$$|a_{n+1} - \pi| = f'(\alpha) |a_n - \pi| \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④、⑤より①を得る. (終)

次に $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求める.

①を繰り返し用いると

$$(0 \leq) |a_n - \pi| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} |a_1 - \pi|$$

$n \rightarrow \infty$ のとき (右辺) $\rightarrow 0$ だから

$|a_n - \pi| \rightarrow 0$ であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi \quad (\text{答})$$

[6]

(1) $\overline{OA}$ から $\overline{OB}$ までの回転角は

$$\arg \frac{\alpha^2 - 0}{\alpha - 0} = \arg \alpha$$

であり, 条件(I)より

$$\arg \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

ゆえに $\angle AOB \neq \frac{\pi}{2}$ である.

次に, $OA = |\alpha|, OB = |\alpha^2| = |\alpha|^2$

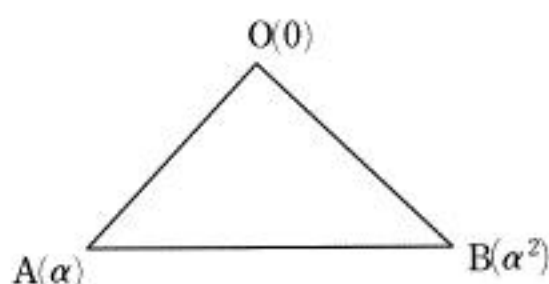
だから, 条件(II)も考えて $OA < OB$ である.

ゆえに OA は $\triangle OAB$ の最大辺ではないから,

$\angle ABO \neq \frac{\pi}{2}$ である.

以上と条件(III)より

$\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ である. (終)



(2) $\angle OAB = \frac{\pi}{2}$ より

($\overline{AO}$ から $\overline{AB}$ までの回転角)

$$= \arg \frac{\alpha^2 - \alpha}{0 - \alpha} = \arg(1 - \alpha) = \pm \frac{\pi}{2}$$

ゆえに $1 - \alpha$ は純虚数である.

$\alpha = a + bi$ (a, b は実数) とおくと

$$1 - \alpha = (1 - a) - bi$$

これが純虚数だから

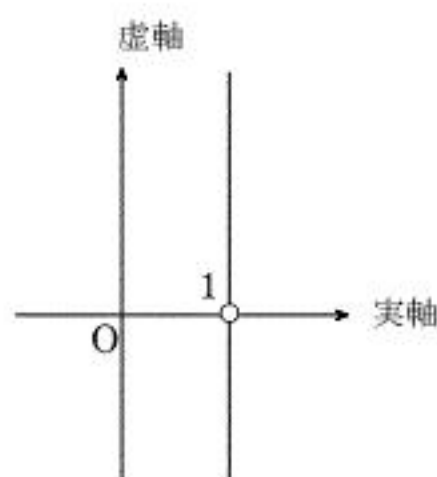
$$\begin{cases} 1 - a = 0 \\ -b \neq 0 \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

よって

$$\alpha = 1 + bi \quad (b \text{ は } 0 \text{ でない実数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

と表せる. このときの条件(I)(II)(III)はすべて成り立つ.

α の集合 S は次のようになる.



(3) $\alpha^2 = x + yi$ に $\textcircled{1}$ を代入すると

$$\begin{aligned} x + yi &= (1 + bi)^2 \\ &= (1 - b^2) + 2bi \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 1 - b^2 \\ y = 2b \end{cases}$$

b を消去すると

$$x = 1 - \frac{y^2}{4} \quad (y \text{ は } 0 \text{ でない実数})$$

となる. ゆえに点 (x, y) の軌跡は

放物線 $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ の $y \neq 0$ の部分 (答)

