

[1]

(1) $y = x^2 - kx$ について, $y' = 2x - k$

l_1 の傾きが $-\frac{1}{3}$ だから,

$$-k = -\frac{1}{3}$$

ゆえに, $k = \frac{1}{3}$ (答)

(2) $t = \tan \theta$ とおく.

$l: y = tx$ と $C: y = x^2 - \frac{1}{3}x$ の交点の x 座標は,

$$tx = x^2 - \frac{1}{3}x$$

$$x = 0, t + \frac{1}{3}$$

ゆえに, P の x 座標は $t + \frac{1}{3}$ で,

l_2 の傾きは,

$$2\left(t + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = 2t + \frac{1}{3}$$

これが,

$$\tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

に等しいから,

$$2t + \frac{1}{3} = \frac{2t}{1-t^2}$$

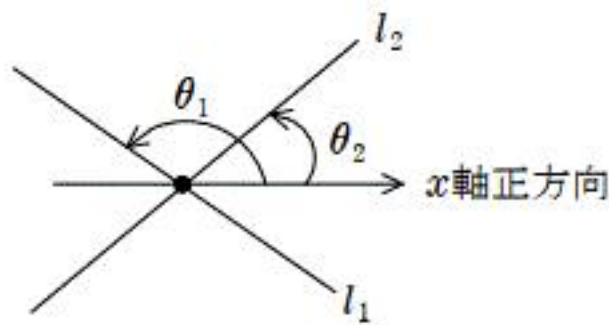
$$\left(2t + \frac{1}{3}\right)(1-t^2) = 2t$$

$$6t^3 + t^2 - 1 = 0$$

$$(2t-1)(3t^2+2t+1) = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \quad (= \tan \theta) \quad (\text{答})$$

(3)



図のように角 θ_1, θ_2 を取ると,

$$\tan \theta_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{4}{3}$$

$\alpha = \theta_1 - \theta_2$ より,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} \\ &= -3 \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[2]

(1) $\frac{x}{a} \leq M, \frac{y}{b} \leq M, \frac{z}{c} \leq M$ と, $a > 0, b > 0, c > 0$ より,

$$x \leq aM, y \leq bM, z \leq cM$$

ゆえに,

$$x + y + z \leq (a + b + c)M$$

$a + b + c > 0$ より,

$$\frac{x + y + z}{a + b + c} \leq M \quad (\text{終})$$

(2)

$$\begin{aligned} \log_2 5 - \log_3 5 &= \frac{1}{\log_5 2} - \frac{1}{\log_5 3} \\ &= \frac{\log_5 3 - \log_5 2}{\log_5 2 \cdot \log_5 3} > 0 \end{aligned}$$

$$(\because 0 < \log_5 2 < \log_5 3)$$

ゆえに,

$$\log_2 5 > \log_3 5 \quad (\text{答})$$

(3) (1)の利用を考える.

$$\frac{1}{1} < 2^n \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\log_2 5}{\log_3 5} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} < \frac{\log_5 4}{\log_5 2} = 2$$

ゆえに,

$$\frac{\log_2 5}{\log_3 5} < 2^n \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\frac{(\log_2 5)^n}{(\log_3 5)^n} < 2^n \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

①, ②, ③に(1)の等号不成立の場合を用いると,

$$\frac{1 + \log_2 5 + (\log_2 5)^n}{1 + \log_3 5 + (\log_3 5)^n} < 2^n$$

また, (2)より,

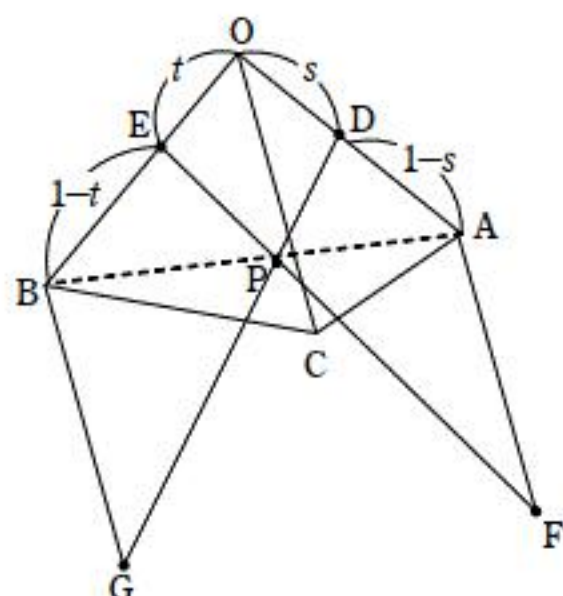
$$\log_2 5 > \log_3 5 > 0 \therefore (\log_2 5)^n > (\log_3 5)^n$$

ゆえに,

$$1 + \log_2 5 + (\log_2 5)^n > 1 + \log_3 5 + (\log_3 5)^n > 0$$

$$\frac{1 + \log_2 5 + (\log_2 5)^n}{1 + \log_3 5 + (\log_3 5)^n} > 1 \quad (\text{終})$$

[3]



(1) Pは直線 EF 上にあるから、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OE} + \alpha \overrightarrow{EF}$$

と表せて、

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} - t\overrightarrow{b}$$

より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{b} + \alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} - t\overrightarrow{b}) \\ &= \alpha\overrightarrow{a} + t(1-\alpha)\overrightarrow{b} + \alpha\overrightarrow{c} \dots\dots\dots ①\end{aligned}$$

また、Pは直線 DG 上にあるから、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \beta \overrightarrow{DG}$$

と表せて、

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - s\overrightarrow{a}$$

より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{a} + \beta(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - s\overrightarrow{a}) \\ &= s(1-\beta)\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \beta\overrightarrow{c} \dots\dots\dots ②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ は 1 次独立だから、①、②より、

$$\begin{cases} \alpha = s(1-\beta) \\ t(1-\alpha) = \beta \\ \alpha = \beta \end{cases}$$

ゆえに、

$$\alpha = \beta = \underbrace{\frac{s}{1+s} = \frac{t}{1+t}}_{\text{③}}$$

であり、③より、

$$s(1+t) = t(1+s) \quad \therefore s = t \quad (\text{証明終})$$

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \alpha(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \\ &= \frac{s}{1+s}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) \quad (\text{答})\end{aligned}$$

(2) $|\overrightarrow{a}| = |\overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{c}| = m$, $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = n$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DG} &= (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} - s\overrightarrow{b}) \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - s\overrightarrow{a}) \\ &= (s^2 - 2s + 3)n + (1 - 2s)m^2\end{aligned}$$

$\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{DG}$ より、 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{DG} = 0$ だから、

$$(s^2 - 2s + 3)n + (1 - 2s)m^2 = 0$$

これと、 $n = m^2 \cos \theta$ かつ、 $m > 0$ より、

$$\cos \theta = \frac{2s - 1}{s^2 - 2s + 3} \quad (\text{答})$$

(3)

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}|^2 &= 3m^2 + 6n \\ &= 3m^2(1 + 2\cos \theta)\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに、} OP = \frac{s}{1+s} \cdot \sqrt{3}m\sqrt{1 + 2\cos \theta}$$

$\sqrt{3}OP = OA$ より、

$$\begin{aligned}\frac{s}{1+s} \cdot 3m\sqrt{1 + 2\cos \theta} &= m \\ \sqrt{1 + 2\cos \theta} &= \frac{1+s}{3s}\end{aligned}$$

$$1 + 2\cos \theta = \frac{(1+s)^2}{9s^2} \quad \left(\frac{1+s}{3s} > 0\right)$$

(2)の結果を代入し、 $0 < s < 1$ を用いて、

$$\begin{aligned}1 + \frac{4s - 2}{s^2 - 2s + 3} &= \frac{(1+s)^2}{9s^2} \\ \frac{(1+s)^2}{s^2 - 2s + 3} &= \frac{(1+s)^2}{9s^2} \\ s^2 - 2s + 3 &= 9s^2 \quad (s^2 - 2s + 3 \neq 0, 9s^2 \neq 0)\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに、} (4s + 3)(2s - 1) = 0 \quad s = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

[4]

$$(1) \quad f(x) = 1 + \sin x \geq 0,$$

$$g(x) = -1 - \cos x \leq 0 \text{ より,}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \text{ は,}$$

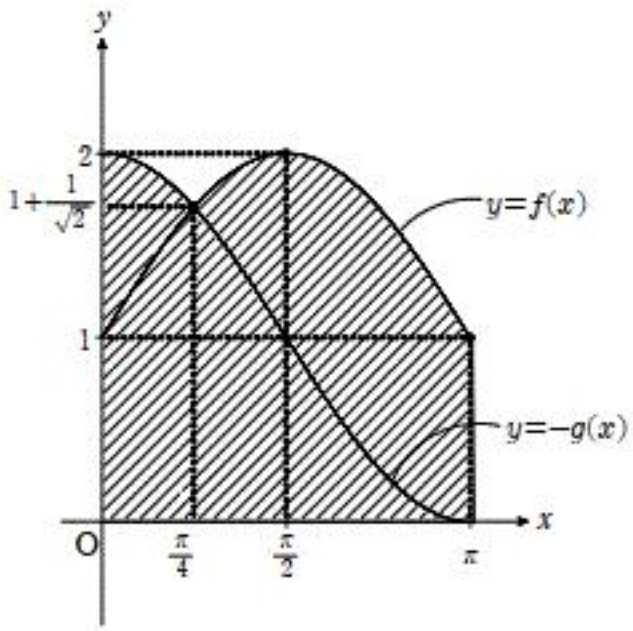
$$1 + \sin x = 1 + \cos x$$

$$\sin x = \cos x$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ より,}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad (\text{答})$$

(2)



図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めればよい.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \{g(x)\}^2 dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \pi \{f(x)\}^2 dx \\ \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos x)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1 + \sin x)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + 2 \sin x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \pi + \left[2 \sin x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-2 \cos x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\ &= \frac{3}{2} \pi + 2\sqrt{2} + \frac{5}{2} \\ \therefore V &= \left(\frac{3}{2} \pi + 2\sqrt{2} + \frac{5}{2} \right) \pi \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[5]

(1) $t > 0$ において,

$$f(t) = e^t - 1 - t$$

$$g(t) = te^t - e^t + 1$$

とおく.

$$f'(t) = e^t - 1 > 0$$

$$g'(t) = e^t + te^t - e^t = te^t > 0$$

ゆえに, $f(t), g(t)$ は共に単調増加で,

$$f(0) = 0, g(0) = 0$$

だから,

$$f(t) > 0, g(t) > 0$$

である.

よって,

$$t < e^t - 1 < te^t$$

$$\text{ゆえに, } 1 < \frac{e^t - 1}{t} < e^t$$

であり, 与不等式は成り立つ. (終)

(2)

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= y_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} x_k \\ &= x_{n+1} + y_{n+1} + \sum_{k=1}^n x_k \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} x_{n+1} + y_{n+1} &= \log(e^{a_{n+1}} + 1) + \log(e^{a_{n+1}} - 1) \\ &= \log(e^{2a_{n+1}} - 1) \\ &= \log(e^{a_n} - 1) = y_n \end{aligned}$$

これを①に代入すると,

$$z_{n+1} = y_n + \sum_{k=1}^n x_k = z_n$$

ゆえに, z_n は定数である. (終)

(3)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{e^{a_k} + 1}{2}\right) \text{とおく.}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (x_k - \log 2) \\ &= z_n - y_n - n \log 2 \\ &= z_1 - \log(e^{a_n} - 1) + \log a_n \\ &= z_1 - \log \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \end{aligned}$$

(1)で $t = a_n$ (> 0) とすると,

$$1 \leq \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \leq e^{a_n}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき, $a_n \rightarrow 0$ だから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$$

ゆえに,

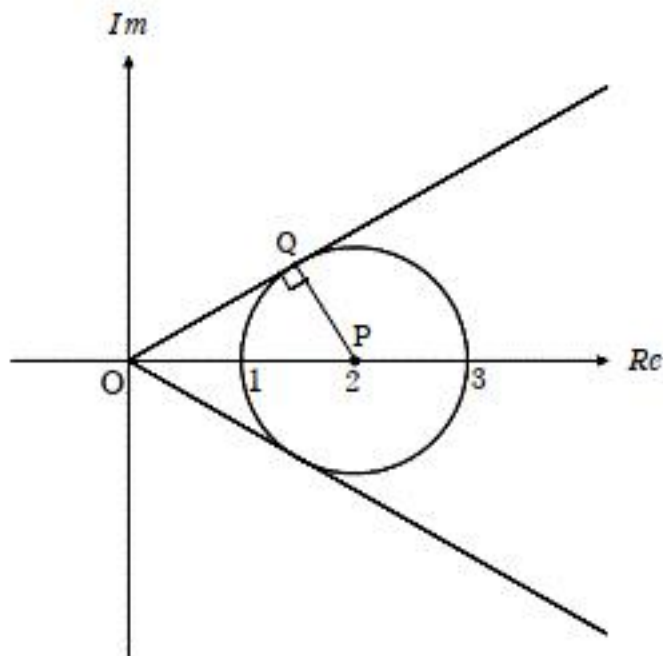
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= z_1 = x_1 + y_1 \\ &= \log\left(e^{\frac{1}{2}} + 1\right) + \log\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) \\ &= \log(e - 1) \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

[6]

(1)

$$\begin{aligned} |z|^2 + 3 &= 2(z + \bar{z}) \\ z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 3 &= 0 \\ (z-2)(\bar{z}-2) &= 1 \\ |z-2| &= 1 \end{aligned}$$

よって、Aは右図の円.



(2) 図のように、点P、Qを取ると、 $\triangle OPQ$ で、

$$\angle POQ = \frac{\pi}{6}$$

ゆえに、図より、 $\arg z = \theta$ の範囲は、

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad (\text{答})$$

(3) z^{60} が正の実数となる条件は、

$\arg z^{60} = 60\theta$ が 2π の整数倍となる

ことで、(2)より、 $-10\pi \leq 60\theta \leq 10\pi$ だから、

$$60\theta = 2\pi n \quad (n = -5, -4, \dots, 5)$$

このとき

$$\theta = \frac{\pi n}{30} \quad (n = -5, -4, \dots, 5)$$

また、 θ に対応する z の個数は(1)の図より、

$$\begin{cases} \theta = \pm \frac{\pi}{6} & \text{なら } 1 \\ -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} & \text{なら } 2 \end{cases}$$

以上より、求める z の個数は 20 (答)