

第1問 x の2次関数

$$y = x^2 - 2px + \frac{9p^2}{8} + \frac{p}{8} + \frac{1}{2}$$

の最小値を $m(p)$ とする。このとき、次の各問に答えよ。

問1 p が任意の実数値をとるとき、 $m(p)$ は p の関数と考えられる。

$m(p) \leq 2$ となる p の範囲を求めよ。

問2 p が8で割って余りが r の自然数のとき、 $m(p)$ が整数となる r を求めよ。

問3 $m(p)$ が整数で、かつ $m(p) \leq 102$ となる自然数 p の個数を求めよ。

第2問 次の各問に答えよ。

問 1 関数 $y = -\cos 2\theta$ のグラフの概形をかけ。

問 2 関数 $y = 2\sin\theta - \cos 2\theta$ のグラフの概形をかけ。また、その周期はいくらか。

問 3 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ のとき、関数 $y = 2\sin\theta - \cos 2\theta$ の最大値と最小値を求めよ。

第3問 曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) 上の点を (x_n, y_n) , ただし, $y_n < y_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) とする。

この曲線と直線 $y = y_n$, $y = y_{n-1}$ ($n \geq 2$) 及び y 軸で囲まれた部分の面積を A_n とする。このとき, 次の各問に答えよ。

問1 4点 $(0, 0)$, $(x_n, 0)$, (x_n, y_n) , $(0, y_n)$ を頂点とする長方形の面積を S_n とする。

$A_n = 2n$ ($n \geq 2$) であるとき, 数列 $\{S_n\}$ の漸化式を求めよ。ただし, $y_1 = 1$ とする。

問2 問1のもとで, この曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) と直線 $y = y_n$ 及び y 軸で囲まれた部分の面積を n を用いて表せ。

第4問 三角形 OAB において、線分 AB を 3 : 1 に内分する点を C とする。線分 OC 上の点 P を $\overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{OC}$ ($0 < k < 1$) となるように定め、直線 BP と直線 OA の交点を A'、直線 AP と直線 OB の交点を B' とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき、次の各問に答えよ。

問 1 $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

問 2 $\overrightarrow{OA'} = x \vec{a}$ とおくとき、 x を k の式で表せ。

問 3 三角形 OAB と三角形 OA' B' の面積比が 5 : 1 であるとき、 k の値を求めよ。

第 5 問 関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = 2 \sin x + \cos x + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$$

を満たすとする。このとき、次の各問に答えよ。

問 1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を求めよ。

問 2 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

第6問 $y = f(x)g(x)$ の導関数は定義に従って変形すると

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \\ &\quad + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \dots \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

と表すことができる。

$f(x) = x^2$, $g(x) = \sin 2x$ とするとき、次の各問に答えよ。

問1 導関数の定義を用いて $f'(x)$ を求めよ。

問2 導関数の定義を用いて $g'(x)$ を求めよ。

なお、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ を必要に応じて用いてよい。

問3 ①式を用いて $y' = \{f(x)g(x)\}'$ を求めよ。

第7問 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の頂点以外の点を $P(x_0, y_0)$ とし、 P における接線を l とする。 l と y 軸の交点を Q とし、放物線の焦点を F とする。さらに、 l 上の点 S を、 P に対して Q と反対側にとる。また、 P を通り y 軸に平行な直線上の点を $R(x_0, y_1)$ (ただし、 $y_1 > y_0$) とする。

このとき、次の各問に答えよ。

問 1 F の座標と準線の方程式を求めよ。

問 2 P における接線の方程式を求めよ。

問 3 $\angle RPS$ は $\angle FPQ$ に等しいことを証明せよ。