第1問　1から n までの番号のついた n 枚のカードをよくきって1列に順に並べる。次の問いに答えよ。

問1　1番目にあるカードの番号が1である場合の数を n を用いて表せ。

問2　$n=4$ であるとき，カードの順番とカードの番号がすべて一致しない場合の数を求めよ。

問3　$n=6$ であるとき，カードの順番とカードの番号が一致しているカードがちょうど2枚である確率を求めよ。

第２問　２次方程式 $x^2-x-1=0$ の２つの解を α, β とする。数列 $\{a_n\}$ は

$$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしている（ただし，A と B は定数とする）。次の問いに答えよ。

問１　$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ を示せ。

問２　$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ であるとき，定数 A と B を α, β で表せ。

問３　$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ であるとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

第３問　空間内に３点 A(5, 0, 2), B(3, 3, 3), C(6, 3, 0) がある。また，点 D と点 E は xy 平面上の点とする。次の問いに答えよ。

問１　直線 AB と xy 平面との交点 D の座標を求めよ。

問２　直線 AE が ∠BAC の２等分線であるとき，点 E の座標を求めよ。

問３　点 D と点 E を問１と問２で求めた点とするとき，△ADE の面積を求めよ。

第 4 問　座標平面において, 点 A$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ を原点の周りに正の向きに 60° 回転させて得られる点を B とする。さらに, 点 B から x 軸に垂線 BH を下ろし, 線分 AH を 1 辺とする正方形の面積を S とするとき, 次の問いに答えよ。

問 1　点 H の座標を求めよ。

問 2　$p = \sin 2\theta$, $q = \cos 2\theta$ とするとき, S を p と q を用いて表せ。

問 3　$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき, S の最大値と最小値を求めよ。

第５問　数列 $\{a_n\}$ は等式

$$\int_{a_n}^{1} (3x - x^3)\,dx = \frac{1}{n}\int_{0}^{1} (3x - x^3)\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たしている（ただし，$0 \leqq a_n < 1$ とする）。次の問いに答えよ。

問１　定積分 $\displaystyle\int_{0}^{1} (3x - x^3)\,dx$ の値を求めよ。

問２　極限値

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n - 1}{\displaystyle\int_{a_n}^{1} (3x - x^3)\,dx} = \alpha$$

が存在する。このとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ の値を求めよ。

問３　問２の α の値を求めよ。

第6問　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とその列ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ について，

次の問いに答えよ。

問1　A が逆行列をもつとき，実数 α, β について $\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ならば $\alpha=\beta=0$ であることを証明せよ。

問2　A が逆行列をもたないとき，$\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす実数 α, β には $\alpha=\beta=0$ 以外のものが存在することを示せ。

第７問　関数 $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ について，次の問いに答えよ。

問１　$f(1)$ を求めよ。

問２　$x > 0$ のとき $f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は定数であることを示し，その値を求めよ。

問３　$\displaystyle\int_0^1 xf(x)\,dx$ の値を求めよ。