

第1問

問1

整数が偶数となる条件は、一の位が偶数であることである。1~9に偶数は4個あるから、求める数は

$${}_8P_2 \cdot 4 = 224$$

となる。

(答) 224 個

問2

残り二桁に用いる数字の和を3で割った余りが2となればよい。よって残り二桁の数の選び方は①1余る数を二つ、もしくは②0余る数と2余る数をひとつずつ、のどちらかとなる。

3で割った余り	数
0	3, 6, 9
1	1, 4, 7
2	2, 5, 8

上表より、求める数は

$$\textcircled{1}: 2! = 2$$

$$\textcircled{2}: 3 \times 3 \times 2 = 18$$

より

$$2 + 18 = 20$$

である。

(答) 20 個

問3

問2と同様に考えると、百の位が n ($n=2, \dots, 9$) であるような3の倍数はそれぞれ20個できるので、3の倍数の合計の個数は

$$20 \times 9 = 180$$

となる。

(答) 180 個

問4

問3より、一の位が n ($n=1, 2, \dots, 9$) であるような3の倍数もそれぞれ20個できる。したがって一の位が偶数となる3の倍数の個数は

$$20 \times 4 = 80$$

となる。

(答) 80 個

第2問

問1

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= a_{n+1} - 3(n+1) \\&= 5a_n - 12n + 3 - 3(n+1) \\&= 5(a_n - 3n) \\&= 5b_n \\&= 5^n b_1 \\&= 5^n (8-3) \\&= 5^{n+1}\end{aligned}$$

となる。これは $n=0$ としても成り立つから

$$b_n = 5^n$$

となる。

(答) $b_n = 5^n$

問2

問1より

$$\begin{aligned}b_n &= a_n - 3n \\&= 5^n \\&\Leftrightarrow a_n = 5^n + 3n\end{aligned}$$

となる。

(答) $a_n = 5^n + 3n$

問3

$c_{n+1} - c_n = 5^n + 3n$ であるから

$$\begin{aligned}c_{n+1} &= \sum_{k=1}^n (c_{k+1} - c_k) + c_1 \\&= \sum_{k=1}^n (5^k + 3k) + 1 \\&= 5 \times \frac{5^n - 1}{5 - 1} + \frac{3}{2}n(n+1) + 1 \\&= \frac{5^{n+1}}{4} + \frac{3}{2}n(n+1) - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。これは $n=0$ としても成り立つから

$$c_n = \frac{5^n}{4} + \frac{3}{2}n(n-1) - \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $c_n = \frac{5^n}{4} + \frac{3}{2}n(n-1) - \frac{1}{4}$

第3問

問1

$y = x^2$ より $y' = 2x$ であるから、 $P(a, a^2)$ より求める方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = 2ax - a^2$

問2

$a \neq 0$ のとき、直線 QR は ℓ と垂直であることから直線 QR の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2a}(x-a) - 1 \\ &= -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。直線 QR と ℓ の交点を M とすると M は線分 QR の中点であり、M の座標は

$$\begin{aligned} 2ax - a^2 &= -\frac{1}{2a}x - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \left(2a + \frac{1}{2a}\right)x &= a^2 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a(2a^2 - 1)}{4a^2 + 1} \\ \therefore y &= -\frac{3a^2}{4a^2 + 1} \end{aligned}$$

と求められるため、R の座標は

$$\begin{aligned} x &= 2 \cdot \frac{a(2a^2 - 1)}{4a^2 + 1} - a \\ &= a \left\{ \frac{2(2a^2 - 1)}{4a^2 + 1} - 1 \right\} \\ &= -\frac{3a}{4a^2 + 1} \\ y &= 2 \cdot \left(-\frac{3a^2}{4a^2 + 1} \right) - (-1) \\ &= \frac{-6a^2}{4a^2 + 1} + 1 \\ &= -\frac{2a^2 - 1}{4a^2 + 1} \end{aligned}$$

となる。このとき、直線 PR の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - \left(-\frac{2a^2 - 1}{4a^2 + 1} \right)}{a - \left(-\frac{3a}{4a^2 + 1} \right)} &= \frac{a^2(4a^2 + 1) + 2a^2 - 1}{a(4a^2 + 1) + 3a} \\ &= \frac{4a^4 + 3a^2 - 1}{4a(a^2 + 1)} \\ &= \frac{(4a^2 - 1)(a^2 + 1)}{4a(a^2 + 1)} \\ &= \frac{4a^2 - 1}{4a} \end{aligned}$$

であるから、直線 PR の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{4a^2 - 1}{4a}(x-a) + a^2 \\ &= \frac{4a^2 - 1}{4a}x + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow (4a^2 - 1)x - 4ay + a &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また、 $a = 0$ のとき $P(0, 0)$ より ℓ は x 軸に一致し、 $R(0, 1)$ となることから直線 PR の方程式は $x = 0$ となり、 $\textcircled{1}$ は $a = 0$ のときにも成り立つ。したがって、求める方程式は

$$(4a^2 - 1)x - 4ay + a = 0$$

(答) $(4a^2 - 1)x - 4ay + a = 0$

問3

直線 PR の方程式

$$\begin{aligned} (4a^2 - 1)x - 4ay + a &= 0 \\ \Leftrightarrow 4xa^2 + (1 - 4y)a - x &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を a の関数と見ると、すべての a で成り立つことから

$$4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

が必要である。このとき、 $\textcircled{2}$ は

$$(1 - 4y)a = 0$$

となるが、すべての a で成り立つことから

$$1 - 4y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$$

である。以上より、 a の値にかかわらず直線 PR は $(x, y) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ を通る。

(答) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

第4問

問1

$\int_0^1 f(t)dt = a$ とすると、与式より

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{2}x + k$$

となるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 \left(t^2 + \frac{a}{2}t + k \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{4}t^2 + kt \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{a}{4} + k \\ &= a\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{4}{3}k + \frac{4}{9}$$

$$\therefore \int_0^1 f(t)dt = \frac{4}{3}k + \frac{4}{9}$$

となる。

(答) $\int_0^1 f(t)dt = \frac{4}{3}k + \frac{4}{9}$

問2

問1から

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^x \left(t^2 + \frac{a}{2}t + k \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{4}t^2 + kt \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{4}x^2 + kx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \left(\frac{1}{3}k + \frac{1}{9} \right)x^2 + kx\end{aligned}$$

となる。

(答) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \left(\frac{1}{3}k + \frac{1}{9} \right)x^2 + kx$

問3

$$\begin{aligned}h(x) &= g(x) + \frac{1}{3}x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{9}(3k+1)x^2 + \frac{1}{3}(3k+1)x\end{aligned}$$

であるから

$$h'(x) = x^2 + \frac{2}{9}(3k+1)x + \frac{1}{3}(3k+1)$$

となる。 $h(x)$ の x^3 の項の係数は正であるから、 $h(x)$ が単調増加であるとき、 $h(x)$ は極値を持たない。よって $h'(x) = 0$ が重解を持つ、もしくは実数解を持たないので、その判別式を考えることにより

$$\begin{aligned}\frac{1}{81}(3k+1)^2 - \frac{1}{3}(3k+1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (3k+1)(3k-26) &\leq 0 \\ \therefore -\frac{1}{3} &\leq k \leq \frac{26}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{26}{3}$

第5問

問1

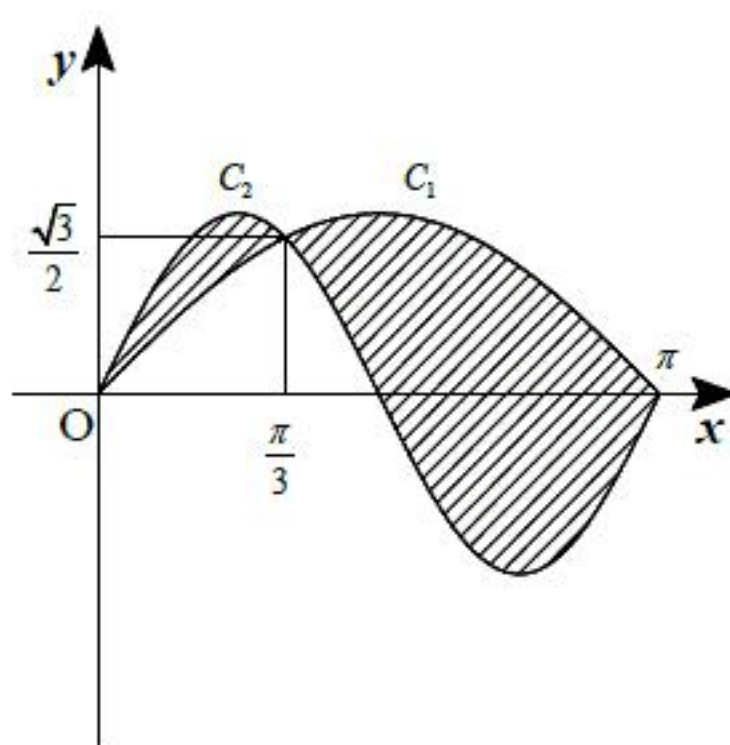
$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 2x \\ \Leftrightarrow \sin x &= 2 \sin x \cos x \\ \Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = 0, \cos x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$$

問2



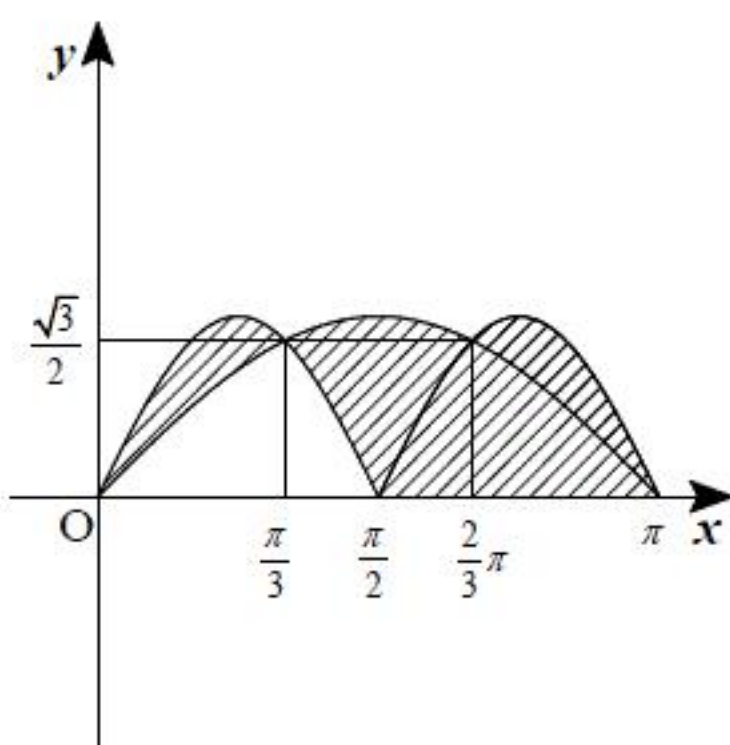
上図より、求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\pi/3}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\pi/3} + \left[-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\pi/3}^{\pi} \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{2}$$

問3



図形 A を x 軸について折り返すと上図のようになる。境界が $x = \frac{\pi}{2}$ について対称であることを

を利用すると、求める体積は

$$\begin{aligned}& 2\pi \left\{ \int_0^{\pi/3} (\sin 2x)^2 dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} (\sin x)^2 dx \right\} - \pi \left\{ \int_0^{\pi/3} (\sin x)^2 dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} (\sin 2x)^2 dx \right\} \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\pi/3} + \pi \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\pi/3}^{\pi/2} - \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/3} - \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_{\pi/3}^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{16} (9\sqrt{3} + 4\pi)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{16} (9\sqrt{3} + 4\pi)$$

第6問

〔課程範囲外〕

問1

$$\begin{cases} k \cos \theta = \frac{3}{4} \\ k \sin \theta = \frac{2}{4} \end{cases}$$

であり、 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ であるから

$$\begin{aligned} k^2 &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 \\ &= \frac{13}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{13}}{4} (\because k > 0)$$

となる。よって

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{\sqrt{13}}{4}, \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

問2

行列 A は点を原点に関して θ 回転させ、原点との距離を k 倍する移動を表す。よって $OP = 1$ であるから $\triangle OPQ$ は $\angle POQ = \theta$, $OQ = k$ の三角形であり、 $\triangle OQR$ は $\angle QOR = \theta$, $OR = k^2$ の三角形である。また、 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ であるから、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、 $\triangle OPQ$ と $\triangle OQR$ は重な

らない。よって求める面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} OP \cdot OQ \sin \angle POQ + \frac{1}{2} OQ \cdot OR \sin \angle QOR - \frac{1}{2} OR \cdot OP \sin \angle ROP \\ &= \frac{1}{2} k \sin \theta + \frac{1}{2} k^3 \sin \theta - \frac{1}{2} k^2 \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2} (1 + k^2) k \sin \theta - (k \sin \theta)(k \cos \theta) \\ &= \frac{5}{64} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{64}$$