

第1問

問1

$y = kx^2 + 2kx - 1$ は x の2次関数であるから、 $k \neq 0$ である。
このもとで、 x 軸と共有点をもつ条件は、判別式を D として

$$\frac{D}{4} = k^2 + k \geq 0$$
$$\therefore k \leq -1, 0 < k \quad (\because k \neq 0)$$

(答) $k \leq -1, 0 < k$

問2

$$y = kx^2 + 2kx - 1$$
$$= k(x+1)^2 - k - 1$$

[1] $k > 0$ のとき

$-3 \leq x \leq 2$ における最小値は、 $x = -1$ のとき

$$k(-1+1)^2 - k - 1 = -k - 1$$

最大値は、 $x = 2$ のとき

$$k(2+1)^2 - k - 1 = 8k - 1$$

[2] $k \leq -1$ のとき

最小値は、 $x = 2$ のとき $8k - 1$

最大値は、 $x = -1$ のとき $-k - 1$

(答)

$k > 0$ のとき	最大値	$8k - 1$	最小値	$-k - 1$
$k \leq -1$ のとき	最大値	$-k - 1$	最小値	$8k - 1$

問3

[1] $k > 0$ のとき

問2より、

$$-k^2 - 2k = 8k - 1$$

$$k^2 + 10k - 1 = 0$$

$$\therefore k = -5 \pm \sqrt{26}$$

$k > 0$ なので、

$$k = -5 + \sqrt{26}$$

[2] $k \leq -1$ のとき

同様に

$$-k^2 - 2k = -k - 1$$

$$k^2 + k - 1 = 0$$

$$\therefore k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$k \leq -1$ なので、

$$k = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

以上 [1], [2] より、

$$k = -5 + \sqrt{26}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(答) $k = -5 + \sqrt{26}, -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

第3問

問1

2点P, Qは原点を中心とする半径1の円周上の点なので, $0^\circ \leq \alpha, \beta < 360^\circ$ として

$$\vec{p} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \vec{q} = (\cos \beta, \sin \beta)$$

とおける。 $\vec{OA} = \vec{p} + \vec{q}$ より,

$$\begin{cases} \cos \alpha + \cos \beta = 1 \\ \sin \alpha + \sin \beta = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \cos \beta = 1 - \cos \alpha, \sin \beta = -\sin \alpha$$

これらを $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ に代入して,

$$(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

よって, 以上の式を満たす解を1つ求めると,

$$\vec{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \vec{q} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(\text{答}) \vec{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \vec{q} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

($\vec{p}, \vec{q}$ が入れ替わっていても可)

問2

求める値の2乗を計算すると,

$$\begin{aligned} |\vec{p} + \vec{q}|^2 &= |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} \\ &= 2(1 + \vec{p} \cdot \vec{q}) \end{aligned}$$

$|\vec{p} + \vec{q}| \geq 0$ なので,

$$|\vec{p} + \vec{q}| = \sqrt{2(1 + \vec{p} \cdot \vec{q})}$$

$$(\text{答}) |\vec{p} + \vec{q}| = \sqrt{2(1 + \vec{p} \cdot \vec{q})}$$

問3

問2の結果を変形して,

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{1}{2} |\vec{p} + \vec{q}|^2 - 1$$

となる。よって, $\vec{p} \cdot \vec{q}$ は $|\vec{p} + \vec{q}|$ ($=OR$) が最小になるときに最小となる。

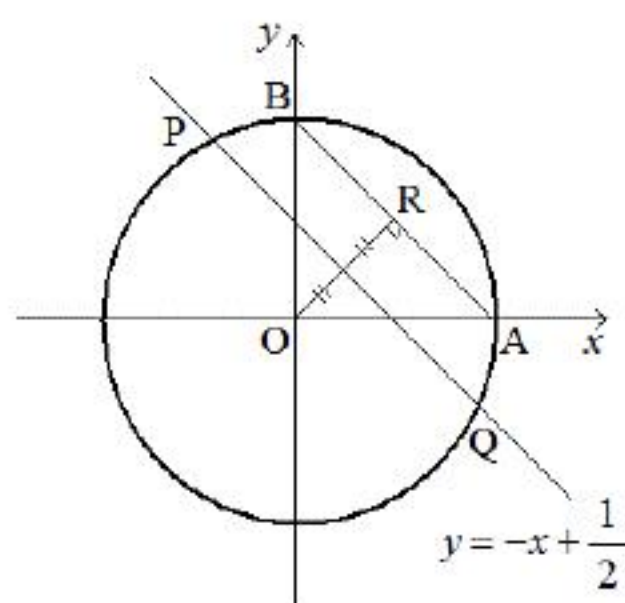
ORが最小になるのは, 明らかに $R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のときである。

P, Qを図のようにとれば, $R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となるので, このとき $\vec{p} \cdot \vec{q}$ が最小になる。

このとき $OR = \frac{1}{\sqrt{2}}$ なので, 求める最小値は

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$(\text{答}) \vec{p} \cdot \vec{q} = -\frac{3}{4}$$



問4

Rは直線AB上にあるので, $R(X, Y)$ とすると

$$Y = -X + 1$$

が成り立つ。 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ が最大になるのはPとQが一致しているときであり,

このとき $OR = 2$ となることから,

$$X^2 + Y^2 = 2^2$$

$$X^2 + (-X + 1)^2 = 4$$

$$2X^2 - 2X - 3 = 0$$

$$\therefore X = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$Y = -X + 1 = \frac{1 \mp \sqrt{7}}{2}$$

P, QはORの中点であるから,

$$\vec{p} = \vec{q} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}, \frac{1 \mp \sqrt{7}}{4} \right)$$

$$(\text{答}) \vec{p} = \vec{q} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}, \frac{1 \mp \sqrt{7}}{4} \right) \quad (\text{複号同順})$$

第4問

問1

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 - 3k^2 \\ &= 3(x + |k|)(x - |k|)\end{aligned}$$

よって、 $f(x)$ の極大値は $x = -|k|$ のときであり、

$$\begin{aligned}f(-|k|) &= -|k|^3 + 3k^2|k| + 2k \\ &= 2|k|^3 + 2k\end{aligned}$$

$f(x)$ の極小値は $x = |k|$ のときであり、

$$\begin{aligned}f(|k|) &= |k|^3 - 3k^2|k| + 2k \\ &= -2|k|^3 + 2k\end{aligned}$$

(答) 極大値 $2|k|^3 + 2k$, 極小値 $-2|k|^3 + 2k$

問2

$f(x) = 0$ が異なる3個の実数解をもつのは、 $f(|k|) \cdot f(-|k|) < 0$ のときである。

(1)の答より、これは $(2k^3 + 2k)(-2k^3 + 2k) < 0$ と同値である。これを解くと、

$$4k^2(k^2 + 1)(k^2 - 1) > 0$$

$$k^2 - 1 > 0 \quad (\because k \neq 0)$$

$$\therefore k < -1, k > 1$$

(答) $k < -1, k > 1$

問3

問1より、

$$P(-|k|, 2|k|^3 + 2k), Q(|k|, -2|k|^3 + 2k)$$

だから、 R の x 座標は、

$$\frac{-|k| + |k|}{2} = 0$$

R の y 座標は、

$$\frac{(2|k|^3 + 2k) + (-2|k|^3 + 2k)}{2} = 2k$$

したがって、

$$R(0, 2k)$$

(答) $R(0, 2k)$

問4

接線が平行な相異なる2点 $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ は

$$f'(a) = f'(b)$$

すなわち、

$$(3a^2 - 3k^2) - (3b^2 - 3k^2) = 3(a - b)(a + b) = 0$$

を満たす。 $a \neq b$ なので、

$$a + b = 0$$

である。このとき、 AB の中点は、 x 座標が

$$\frac{a + b}{2} = 0$$

y 座標が、

$$\begin{aligned}\frac{f(a) + f(b)}{2} &= \frac{(a^3 - 3k^2a + 2k) + (b^3 - 3k^2b + 2k)}{2} \\ &= \frac{(a^3 + b^3) - 3k^2(a + b) + 2 \cdot 2k}{2} \\ &= \frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2) - 3k^2(a + b) + 2 \cdot 2k}{2} \\ &= 2k \quad (\because a + b = 0)\end{aligned}$$

となるので、点 R に一致する。 A, B の中点は直線 AB 上にあるので、命題は成立する。

(証明終)

第 5 問

問 1

C の頂点の座標が (p, e^{-p}) なので、 C の方程式は定数 a を用いて

$$y = a(x - p)^2 + e^{-p}$$

と表せる。これが原点を通るので、

$$0 = ap^2 + e^{-p}$$

$$\therefore a = -\frac{e^{-p}}{p^2} \quad (\because p > 0)$$

以上より、 C の方程式は

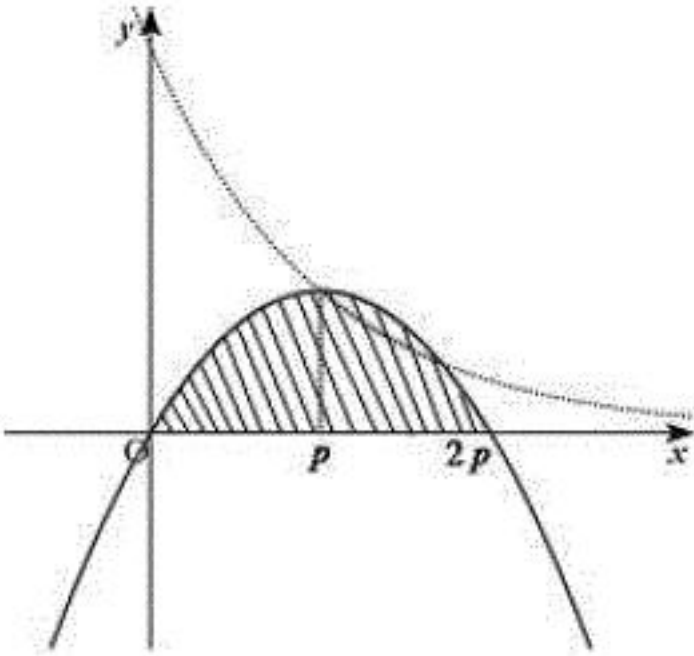
$$\begin{aligned} y &= -\frac{e^{-p}}{p^2}(x - p)^2 + e^{-p} \\ &= -\frac{e^{-p}}{p^2}x(x - 2p) \end{aligned}$$

(答) $y = -\frac{e^{-p}}{p^2}x(x - 2p)$

問 2

求めるのは次図斜線部を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積なので、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2p} y^2 \pi dx \\ &= \int_0^{2p} \left\{ -\frac{e^{-p}}{p^2}x(x - 2p) \right\}^2 \pi dx \\ &= \frac{\pi e^{-2p}}{p^4} \int_0^{2p} (x^4 - 4px^3 + 4p^2x^2) dx \\ &= \frac{\pi e^{-2p}}{p^4} \left[\frac{1}{5}x^5 - px^4 + \frac{4}{3}p^2x^3 \right]_0^{2p} \\ &= \frac{16}{15} \pi e^{-2p} p \end{aligned}$$



(答) $V = \frac{16}{15} \pi e^{-2p} p$

問 3

$f(p) = e^{-2p}p$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(p) &= -2e^{-2p}p + e^{-2p} \\ &= e^{-2p}(1 - 2p) \end{aligned}$$

よって、 $f(p)$ の $p > 0$ における増減表は次のようになる。

p	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(p)$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(p)$	$\times$	$\nearrow$		$\searrow$

ゆえに、 $f(p)$ は $p = \frac{1}{2}$ で最大となり、最大値は

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$$

これより、 V の最大値は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{16}{15} \pi f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{8\pi}{15e} \end{aligned}$$

(答) $\frac{8\pi}{15e}$

第6問

問1

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$\begin{aligned} A^2 &= (a+b)A - (ab-ab)E \\ &= (a+b)A \end{aligned}$$

ゆえに, k は

$$\begin{aligned} A^2 - kA &= (a+b)A - kA \\ &= (a+b-k)A \\ &= O \end{aligned}$$

を満たす。 $a+b \neq 0$ より, $A \neq O$ なので,

$$k = a+b$$

(答) $k = a+b$

問2

$n \geq 3$ のとき,

$$\begin{aligned} A^n &= A^2 \cdot A^{n-2} \\ &= kA \cdot A^{n-2} \\ &= kA^{n-1} \end{aligned}$$

この式は, $n=2$ のときも成立する。これを繰り返し用いて,

$$\begin{aligned} A^n &= kA^{n-1} \\ &= k^2 A^{n-2} \\ &= \dots \\ &= k^{n-1} A \\ &= (a+b)^{n-1} A \\ &= (a+b)^{n-1} \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

この式は, $n=1$ のときも成立する。

$$(答) \quad A^n = (a+b)^{n-1} \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$$

問3

$$(E+A)^n = E + \frac{(a+b+1)^n - 1}{a+b} A \quad \cdots \textcircled{1}$$

が任意の自然数 n に対して成立することを, 数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\frac{(a+b+1)^1 - 1}{a+b} = \frac{a+b+(1-1)}{a+b} = 1$$

より,

$$(\text{右辺}) = (\text{左辺}) = E + A$$

となり, $\textcircled{1}$ は成立する。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき $\textcircled{1}$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} (E+A)^{k+1} &= (E+A) \cdot (E+A)^k \\ &= (E+A) \cdot \left(E + \frac{(a+b+1)^k - 1}{a+b} A \right) \\ &= E + \left(1 + \frac{(a+b+1)^k - 1}{a+b} \right) A + \frac{(a+b+1)^k - 1}{a+b} A^2 \end{aligned}$$

$A^2 = kA = (a+b)A$ より,

$$\begin{aligned} (E+A)^{k+1} &= E + \left(1 + \frac{(a+b+1)^k - 1}{a+b} \right) A + \frac{(a+b+1)^k - 1}{a+b} \cdot (a+b) A \\ &= E + \left(\frac{(a+b+1)^k - 1}{a+b} + \frac{(a+b+1)^k \{ (a+b+1) - 1 \}}{a+b} \right) A \\ &= E + \frac{(a+b+1)^{k+1} - 1}{a+b} A \end{aligned}$$

ゆえに, $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成立する。

以上 [1], [2] より, 任意の自然数 n に対して $\textcircled{1}$ が成立することが示された。

(証明終)