

第1問

問1

$a+b=n$ を満たす整数の組 (a, b) は、

$$(a, b) = (0, n), (1, n-1), (2, n-2), \dots, (n, 0)$$

であるから、全部で $n+1$ 個である。

(答) $n+1$ 個

問2

$a=k$ ($0 \leq k \leq n$) とおくと、

$$k+b+c=n \Leftrightarrow b+c=n-k$$

である。この式を満たす整数の組 (b, c) の個数は、問1の結果より、

$$n-k+1 \text{ (個)}$$

である。したがって、題意を満たす整数の組 (a, b, c) の個数は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (n-k+1) &= (n+1) + \sum_{k=1}^n (n-k+1) \\ &= n+1 + n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \text{ (個)} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$ 個

問3

同様に、 $a=k$ ($0 \leq k \leq n$) とおくと、

$$k+b+c+d=n \Leftrightarrow b+c+d=n-k$$

である。この式を満たす整数の組 (b, c, d) の個数は、問2の結果より、

$$\frac{1}{2}(n-k)^2 + \frac{3}{2}(n-k) + 1 \text{ (個)}$$

である。したがって、題意を満たす整数の組 (a, b, c, d) の個数は、

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \left\{ \frac{1}{2}(n-k)^2 + \frac{3}{2}(n-k) + 1 \right\} \\ &= \sum_{m=0}^n \left\{ \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 1 \right\} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 1 \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n \\ &= \frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 \text{ (個)} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1$ 個

第2問

問1

公差を d' とすると、数列 $\{\theta_n\}$ の一般項は、

$$\theta_n = \theta_1 + (n-1)d' = (n-1)d'$$

である。点 $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ が単位円周上をちょうど1周して $P_{10} = P_1$ となるから、 $\theta_{10} = 360$ であり、

$$\theta_{10} = (10-1)d'$$

$$\Leftrightarrow 360 = 9d'$$

$$\Leftrightarrow d' = 40$$

となる。

(答) 公差: 40

問2

点 $P_1, P_2, \dots, P_k$ が単位円上をちょうど1周して $P_k = P_1$ となるとき、 $\theta_k = 360$ である。

ここで、 $\theta_{n+1} - \theta_n = n + d$ より、 $k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\theta_k &= \theta_1 + \sum_{l=1}^{k-1} (\theta_{l+1} - \theta_l) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} (l + d) \\ &= \frac{1}{2}(k-1)k + d(k-1) \\ &= \frac{1}{2}(k-1)(k+2d)\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{1}{2}(k-1)(k+2d) = 360$$

$$\Leftrightarrow k+2d = \frac{720}{k-1} \quad (\because k \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow 2d = \frac{-k^2 + k + 720}{k-1}$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{-k^2 + k + 720}{2(k-1)}$$

となる。

$$(答) \quad d = \frac{-k^2 + k + 720}{2(k-1)}$$

問3

$k=6$ のとき、

$$d = \frac{-6^2 + 6 + 720}{2(6-1)} = 69$$

であるから、 $n \geq 7$ のとき、

$$\theta_n = \frac{1}{2}(n-1)(n+2d) = \frac{1}{2}(n-1)(n+138)$$

である。また、 $P_n = P_1$ であるから、 $\theta_n = 360a$ (a は2以上の自然数) とおくと、

$$\frac{1}{2}(n-1)(n+138) = 360a$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n+138) = 720a$$

である。ここで、

$$n+138 = 720 \Leftrightarrow n = 582$$

とすると、

$$581 \cdot 720 = 720 \cdot a \Leftrightarrow a = 581$$

であるから、 a は2以上の自然数となり $P_{582} = P_1$ が成り立つ。したがって、 $P_n = P_1$ を満たす

n ($n \geq 7$) のひとつは、

$$n = 582$$

である。

(答) $n = 582$

※他に $n = 721, 1302, 1441$ などでもよい。

第3問

問1

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{4}{1+4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{1+4}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{4}{5}(2, -1, 4) + \frac{1}{5}(k, -k, 2) \\ &= \left(\frac{k+8}{5}, \frac{-k-4}{5}, \frac{18}{5} \right)\end{aligned}$$

であるから、点 P の座標は、

$$\left(\frac{k+8}{5}, \frac{-k-4}{5}, \frac{18}{5} \right)$$

である。

$$\text{(答)} \quad \left(\frac{k+8}{5}, \frac{-k-4}{5}, \frac{18}{5} \right)$$

問2

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (k-2, -k+1, -2)$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &\perp \overrightarrow{OP} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (k-2, -k+1, -2) \cdot \left(\frac{k+8}{5}, \frac{-k-4}{5}, \frac{18}{5} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} \{ (k-2)(k+8) + (-k+1)(-k-4) - 2 \cdot 18 \} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2k^2 + 9k - 56 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k+8)(2k-7) &= 0 \\ \Leftrightarrow k = \frac{7}{2} \quad (\because k > 0)\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad k = \frac{7}{2}$$

問3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (2, -1, 4) \\ \overrightarrow{OB} &= (k, -k, 2) = \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, 2 \right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OA}| &= \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21} \\ |\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{49}{4} + 4} = \frac{\sqrt{114}}{2} \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= 2 \cdot \frac{7}{2} - 1 \cdot \left(-\frac{7}{2} \right) + 4 \cdot 2 = \frac{37}{2}\end{aligned}$$

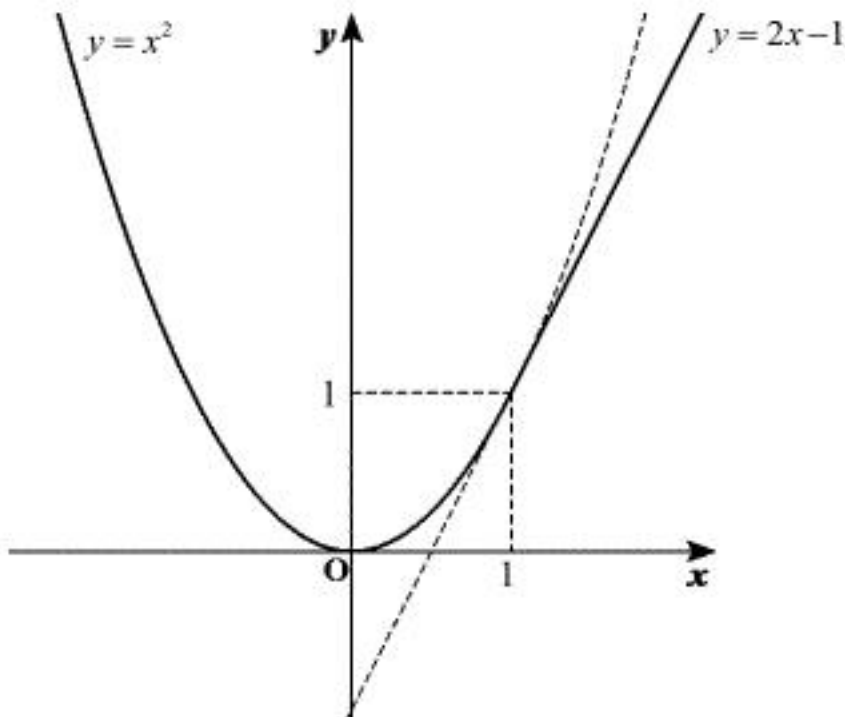
である。したがって、△OAB の面積は、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{21 \cdot \frac{114}{4} - \left(\frac{37}{2} \right)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{2394 - 1369} \\ &= \frac{5\sqrt{41}}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{5\sqrt{41}}{4}$$

第4問



問 1

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^3 f(x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 (2x-1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[x^2 - x \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{3} + (9-3) - (1-1) \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{19}{3}$

問 2

[1] $t+3 \leq 1 \Leftrightarrow t \leq -2$ のとき

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_t^{t+3} f(x) dx \\ &= \int_t^{t+3} x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_t^{t+3} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ (t+3)^3 - t^3 \right\} \\ &= 3t^2 + 9t + 9 \end{aligned}$$

となる。

[2] $t \leq 1 < t+3 \Leftrightarrow -2 < t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_t^{t+3} f(x) dx \\ &= \int_t^1 x^2 dx + \int_1^{t+3} (2x-1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_t^1 + \left[x^2 - x \right]_1^{t+3} \\ &= \frac{1}{3} (1-t^3) + \left\{ (t+3)^2 - (t+3) \right\} - (1-1) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} t^3 + t^2 + 5t + 6 \\ &= -\frac{1}{3} t^3 + t^2 + 5t + \frac{19}{3} \end{aligned}$$

である。

[3] $t > 1$ のとき

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_t^{t+3} f(x) dx \\ &= \int_t^{t+3} (2x-1) dx \\ &= \left[x^2 - x \right]_t^{t+3} \\ &= \left\{ (t+3)^2 - (t+3) \right\} - (t^2 - t) \\ &= 6t + 6 \end{aligned}$$

となる。

(答)
$$g(t) = \begin{cases} 3t^2 + 9t + 9 & (t \leq -2) \\ -\frac{1}{3} t^3 + t^2 + 5t + \frac{19}{3} & (-2 < t \leq 1) \\ 6t + 6 & (t > 1) \end{cases}$$

問 3

[1] $t \leq -2$ のとき

$$g'(t) = 6t + 9$$

である。

[2] $-2 < t \leq 1$ のとき

$$g'(t) = -t^2 + 2t + 5$$

である。

[3] $t > 1$ のとき

$$g'(t) = 6$$

である。

[1], [2], [3]より、 $g(t)$ の $-3 \leq t \leq 3$ における増減表は次のようになる。

t	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	$1-\sqrt{6}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(t)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(t)$	9	$\searrow$		$\searrow$	$12-4\sqrt{6}$	$\nearrow$		$\nearrow$	24

増減表より、 $g(t)$ は、
 $t=3$ のとき最大値 24 をとり、 $t=1-\sqrt{6}$ のとき最小値 $12-4\sqrt{6}$ をとる。

(答) 最大値 24 ($t=3$ のとき)
最小値 $12-4\sqrt{6}$ ($t=1-\sqrt{6}$ のとき)

第5問

問1

数学的帰納法により、

$$a_n d_n - b_n c_n = 3^n \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを示す。

[1] $n=1$ のとき

$$a_1 d_1 - b_1 c_1 = ad - bc = 3$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき

$\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると、

$$a_k d_k - b_k c_k = 3^k$$

である。このとき、 $A^{k+1} = A^k A$ より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_k a + b_k c & a_k b + b_k d \\ c_k a + d_k c & c_k b + d_k d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} a_{k+1} d_{k+1} - b_{k+1} c_{k+1} &= (a_k a + b_k c)(c_k b + d_k d) - (a_k b + b_k d)(c_k a + d_k c) \\ &= a_k d_k (ad - bc) - b_k c_k (ad - bc) \\ &= (a_k d_k - b_k c_k)(ad - bc) \\ &= 3^k \cdot 3 \\ &= 3^{k+1} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上[1],[2]より、 $a_n d_n - b_n c_n = 3^n$ が成り立つことが示された。

(証明終)

問2

ハミルトン・ケーリーの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 &= (a+d)A - (ad-bc)E \\ \Leftrightarrow A^2 &= A - 3E \quad (\because a+d=1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= (A - 3E)A \\ &= A^2 - 3A \\ &= (A - 3E) - 3A \\ &= -2A - 3E \\ &= -2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2a-3 & -2b \\ -2c & -2d-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} a_3 + b_3 &= (-2a-3) + (-2d-3) \\ &= -2(a+d) - 6 \\ &= -8 \end{aligned}$$

である。

(答) $a_3 + b_3 = -8$

問3

ハミルトン・ケーリーの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 &= (a+d)A - (ad-bc)E \\ \Leftrightarrow A^2 &= -3E \quad (\because a+d=0) \end{aligned}$$

である。

[1] $n=2l$ ($l=1, 2, \dots$) のとき

$$\begin{aligned} A^n &= (A^2)^l \\ &= (-3E)^l \\ &= (-3)^l E \\ &= \begin{pmatrix} (-3)^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & (-3)^{\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$a_n + d_n = 2 \cdot (-3)^{\frac{n}{2}}$$

である。

[2] $n=2l+1$ ($l=0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\begin{aligned} A^n &= (A^2)^l A \\ &= (-3E)^{\frac{n-1}{2}} A \\ &= (-3)^{\frac{n-1}{2}} A \\ &= (-3)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

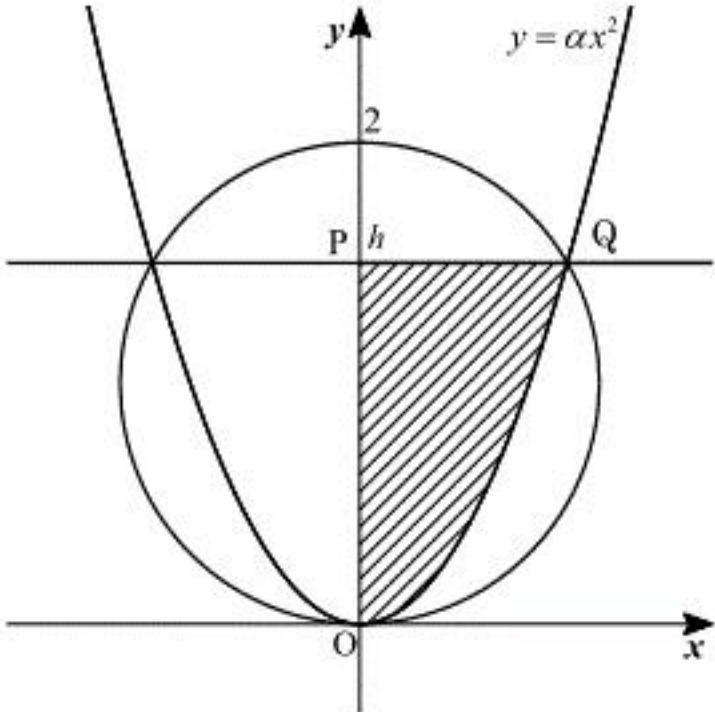
$$a_n + d_n = (-3)^{\frac{n-1}{2}} (a+d) = 0$$

となる。

(答) $a_n + d_n = \begin{cases} 2 \cdot (-3)^{\frac{n}{2}} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$

第 6 問

図形 A は次図の斜線部である。



問 1

点 Q は円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 上の点で、第 1 象限にあり y 座標が h である。したがって、 x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + (h-1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2h - h^2 \\ \therefore x &= \sqrt{2h - h^2} \quad (\because x > 0) \end{aligned}$$

である。このとき、曲線 $C: y = \alpha x^2$ が点 $Q(\sqrt{2h - h^2}, h)$ を通ることから、

$$\begin{aligned} h &= \alpha \left(\sqrt{2h - h^2} \right)^2 \\ \therefore \alpha &= \frac{1}{2 - h} \quad (\because h \neq 2) \end{aligned}$$

である。

(答) $\alpha = \frac{1}{2 - h}$

問 2

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2h - h^2}} (h - \alpha x^2) dx \\ &= \left[hx - \frac{1}{3} \alpha x^3 \right]_0^{\sqrt{2h - h^2}} \\ &= h\sqrt{2h - h^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2 - h} \left(\sqrt{2h - h^2} \right)^3 \\ &= \frac{2}{3} h \sqrt{2h - h^2} \end{aligned}$$

となる。これは、

$$S = \frac{2}{3} \sqrt{2h^3 - h^4}$$

と変形できるから、 $0 < h < 2$ のときの S と $2h^3 - h^4$ の増減は一致する。ここで、

$$\frac{d}{dh} (2h^3 - h^4) = 6h^2 - 4h^3 = 2h^2 (3 - 2h)$$

であるから、増減表は次のようになる。

h	0	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$\frac{d}{dh} (2h^3 - h^4)$		+	0	−	
$2h^3 - h^4$		↗	$\frac{27}{16}$	↘	
S		↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	

増減表より、 $h = \frac{3}{2}$ のとき S は最大値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

(答) $S = \frac{2}{3} h \sqrt{2h - h^2}$

S の最大値： $\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 3

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h x^2 dy \\ &= \pi \int_0^h \frac{y}{\alpha} dy \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^h \\ &= \frac{\pi}{2} (2 - h) h^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{2} (4h - 3h^2) = \frac{\pi h}{2} (4 - 3h)$$

である。したがって、増減表は次のようになる。

h	0	...	$\frac{4}{3}$	...	2
$\frac{dV}{dh}$		+	0	−	
V		↗	$\frac{16}{27} \pi$	↘	

増減表より、 $h = \frac{4}{3}$ のとき V は最大値 $\frac{16}{27} \pi$ をとる。

(答) $V = \frac{\pi}{2} (2 - h) h^2$

V の最大値： $\frac{16}{27} \pi$

問 4

$$\begin{aligned} X &= \frac{V}{2\pi S} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} (2 - h) h^2}{2\pi \cdot \frac{2}{3} h \sqrt{2h - h^2}} \\ &= \frac{3}{8} \sqrt{2h - h^2} \\ &= \frac{3}{8} \sqrt{1 - (1 - h)^2} \end{aligned}$$

である。 $0 < h < 2 \Leftrightarrow -1 < 1 - h < 1$ であるから、 $1 - h = 0 \Leftrightarrow h = 1$ のとき X は最大値 $\frac{3}{8}$ をとる。

(答) $\frac{3}{8}$