

第 1 問

問 1

2 回サイコロを振って $P(Q)$ が +2 移動する確率は, 2 回ともサイコロの目が奇数である確率と等しいので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

となる。また 2 回サイコロを振って $P(Q)$ が +3 移動する確率は, 1 回サイコロの目が奇数であり, 1 回サイコロの目が偶数である確率と等しいので

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

となる。また 2 回サイコロを振って $P(Q)$ が +4 移動する確率は, 2 回ともサイコロの目が偶数である確率と等しいので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

となる。 $\triangle OPQ$ が二等辺三角形となるのは $OP = OQ$ となるとき, すなわち P, Q の移動距離が等しいときなので, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{8}$$

問 2

OP の長さの期待値は, 問 1 より,

$$2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 3$$

となる。同様に, OQ の長さの期待値も 3 となる。

点 P と点 Q の動き方は互いに独立なので, $\triangle OPQ$ の面積の期待値は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (OP \cdot OQ \text{ の期待値}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (OP \text{ の長さの期待値}) \cdot (OQ \text{ の長さの期待値}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{9}{2}$$

問 3

$\triangle OPQ$ の面積が整数とならない場合を考える。 $\triangle OPQ$ の面積は $\frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ$ と表されるの

で, OP, OQ がともに奇数となる場合のみ, $\triangle OPQ$ の面積が整数とならない。サイコロを 3 回振ったとき $OP(OQ)$ が取りうるのは 3, 4, 5, 6 のいずれかである。 $OP(OQ)$ が 3 となる確率は, 3 回とも奇数が出る確率に等しいので,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

である。また $OP(OQ)$ が 5 となる確率は, 1 回奇数, 2 回偶数が出る確率に等しいので,

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$$

となる。したがって $OP(OQ)$ が奇数となる確率は

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

となる。したがって, $\triangle OPQ$ の面積が整数とならない確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

となる。以上から, $\triangle OPQ$ の面積が整数となる確率は

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4}$$

第2問

問1

数列 $\{c_n\}$ は初項1、公差3の等差数列なので

$$\begin{aligned}c_n &= 1 + 3(n-1) \\ &= 3n - 2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_n = 3n - 2$$

問2

$$\begin{aligned}b_1 &= a_2 - a_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

である。 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2) \\ &= \frac{3n(n-1)}{2} - 2(n-1) \\ &= \frac{3n^2 - 3n - 4n + 4}{2} \\ &= \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 4)\end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のとき

$$b_1 = \frac{1}{2}(3 - 7 + 4) = 0$$

となるので $n=1$ でも成り立つ。以上から全ての自然数 n で $b_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 4)$ となる。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 4)$$

問3

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 - 7k + 4) \\ &= 2 + \frac{1}{2} \left[\frac{3}{6}(n-1)n\{2(n-1)+1\} - \frac{7}{2}n(n-1) + 4(n-1) \right] \\ &= 2 + \frac{1}{4} \{n(n-1)(2n-1) - 7n(n-1) + 8(n-1)\} \\ &= 2 + \frac{1}{4}(n-1)(2n^2 - n - 7n + 8) \\ &= 2 + \frac{1}{4}(n-1)(2n^2 - 8n + 8) \\ &= 2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)^2 \\ &= \frac{1}{2}n(n^2 - 5n + 8)\end{aligned}$$

となる。 $n=1$ のとき

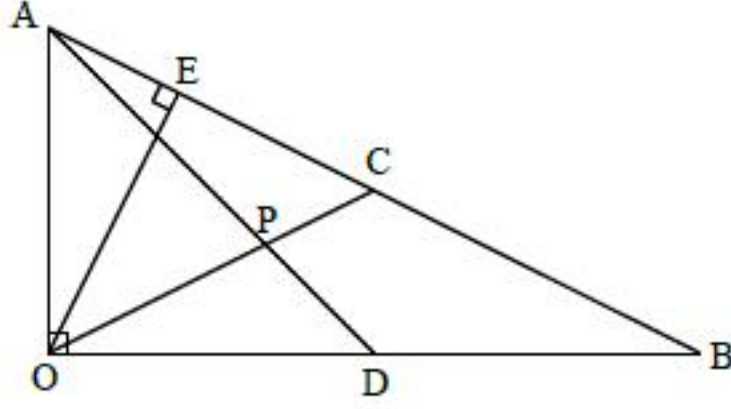
$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1 - 5 + 8) = 2$$

となるので $n=1$ でも成り立つ。以上から全ての自然数 n で $a_n = \frac{1}{2}n(n^2 - 5n + 8)$ となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{2}n(n^2 - 5n + 8)$$

第3問

問1



C は AB の中点であるので

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

となる。P は OC 上にあるので定数 k を用いて

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{2}k\vec{b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおける。また、P は AD 上にあるので、定数 s を用いて $AP:PD=1-s:s$ とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OA} + (1-s)\overrightarrow{OD} \\ &= s\vec{a} + \frac{1}{2}(1-s)\vec{b} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と書ける。 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ は互いに一次独立なので、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を係数比較して、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}k = s \\ \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}(1-s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

となる。これを $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

問2

ある定数 t を用いて $AE:EB=t:1-t$ とおくと

$$\overrightarrow{OE} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

とかける。また、 $\angle AOB = 90^\circ$ なので

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

となる。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ 、 $AB \perp OE$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{AB} &= \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 - (1-t)|\vec{a}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= t(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) - |\vec{a}|^2 \quad (\because \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$$

となる。以上から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \left(1 - \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}\right)\vec{a} + \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}\vec{b} \\ &= \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OE} = \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}\vec{a} + \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}\vec{b}$$

問3

$|\overrightarrow{OC}|=1$ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 = 1 \\ \therefore |\vec{b}| &= \sqrt{4-s^2} \end{aligned}$$

となる。また、問1から

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}| &= \frac{2}{3}|\overrightarrow{OC}| \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{4-s^2}{s^2+(4-s^2)}\vec{a} + \frac{s^2}{s^2+(4-s^2)}\vec{b} \\ &= \frac{4-s^2}{4}\vec{a} + \frac{s^2}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OE}|^2 &= \left(\frac{4-s^2}{4}\right)^2|\vec{a}|^2 + \left(\frac{s^2}{4}\right)^2|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{(4-s^2)^2s^2 + s^4(4-s^2)}{16} \\ &= \frac{s^2(4-s^2)(4-s^2+s^2)}{16} \\ &= \frac{s^2(4-s^2)}{4} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OE} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{4-s^2}{4}\vec{a} + \frac{s^2}{4}\vec{b}\right) \\ &= \frac{4-s^2}{12}|\vec{a}|^2 + \frac{s^2}{12}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{4-s^2}{12} \cdot s^2 + \frac{s^2}{12}(4-s^2) \\ &= \frac{1}{6}s^2(4-s^2) \end{aligned}$$

となる。以上から、 $\triangle OPE$ の面積は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OE}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OE})^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{s^2(4-s^2)}{4} - \left\{\frac{1}{6}s^2(4-s^2)\right\}^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s^2(4-s^2)}{9} - \frac{s^4(4-s^2)^2}{36}} \\ &= \frac{1}{12}\sqrt{s^2(4-s^2)\{4-s^2(4-s^2)\}} \\ &= \frac{1}{12}s\sqrt{(4-s^2)(s^2-2)^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $OA < OB$ であるから

$$\begin{aligned} s &< \sqrt{4-s^2} \\ \Leftrightarrow s^2 &< 4-s^2 \\ \Leftrightarrow s^2 - 2 &< 0 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12}s\sqrt{(4-s^2)(s^2-2)^2} \\ &= \frac{1}{12}s(2-s^2)\sqrt{4-s^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{12}s(2-s^2)\sqrt{4-s^2}$$

第4問

問1

$$f'(0)=a$$

であるので求める接線の方程式は

$$y-b=ax$$

$$\Leftrightarrow y=ax+b$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y=ax+b$$

問2

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \{x^2 - (a+1)x + a\} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax + C \end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。ここで $f(0)=b$ から

$$f(0)=C=b$$

となるので

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax + b$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+1)x^2 + ax + b$$

問3

a の値で場合分けする。

[1] $a < 1$ のとき

$x=1$ で極小値, $x=a$ で極大値をとる。したがって

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{6} = 4 \\ f(a) = -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + b = 40 \end{cases} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{25}{6} - \frac{1}{2}a = 40 \\ &\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 3a + 215 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a+5)(a^2 - 8a + 43) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -5 \end{aligned}$$

となり, これは $a < 1$ を満たす。このとき,

$$\begin{aligned} b &= 4 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2}a \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a = 1$ のとき

$$f'(x) = (x-1)^2 \geq 0$$

となるので, 極値を持たず不適である。

[3] $a > 1$ のとき

$x=1$ で極大値, $x=a$ で極小値をとる。したがって

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2}a + b - \frac{1}{6} = 40 \\ f(a) = -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + b = 4 \end{cases} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{241}{6} - \frac{1}{2}a = 4 \\ &\Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 217 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-7)(a^2 + 4a + 31) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 7 \end{aligned}$$

となり, これは $a > 1$ を満たす。このとき,

$$\begin{aligned} b &= 40 + \frac{1}{6} - \frac{a}{2} \\ &= \frac{110}{3} \end{aligned}$$

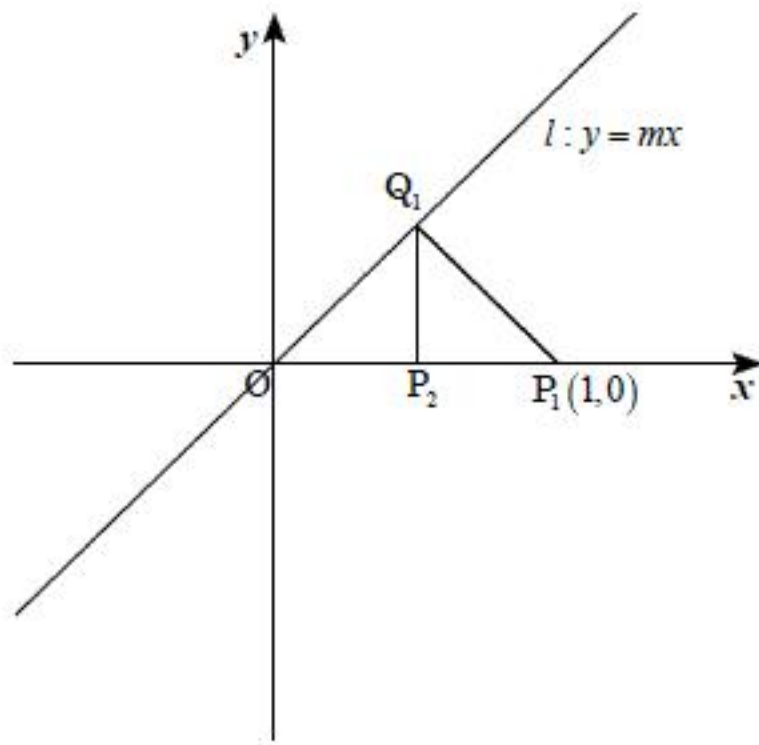
となる。

以上より, $(a, b) = \left(-5, \frac{20}{3}\right), \left(7, \frac{110}{3}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = \left(-5, \frac{20}{3}\right), \left(7, \frac{110}{3}\right)$$

第5問

問1



直線 P_1Q_1 は $y = mx$ と直交するので傾きは $-\frac{1}{m}$ ，また $P_1(1, 0)$ を通るので，その方程式は

$$y = -\frac{1}{m}(x-1)$$

となる。 Q_1 は直線 P_1Q_1 と $y = mx$ の交点より

$$\begin{cases} y = mx \\ y = -\frac{1}{m}(x-1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1+m^2} \\ y = \frac{m}{1+m^2} \end{cases}$$

となる。つまり Q_1 の座標は $\left(\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2}\right)$ となる。また P_2 の座標は $\left(\frac{1}{1+m^2}, 0\right)$ となる。以上から

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+m^2}\right) \cdot \frac{m}{1+m^2} \\ = \frac{m^3}{2(1+m^2)^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{m^3}{2(1+m^2)^2}$$

問2

P_n の x 座標を p_n とおく。問1と同様に考えると P_nQ_n の方程式は

$$y = -\frac{1}{m}(x-p_n)$$

となる。 Q_n はこれと $y = mx$ の交点なので

$$\begin{cases} y = mx \\ y = -\frac{1}{m}(x-p_n) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p_n}{1+m^2} \\ y = \frac{mp_n}{1+m^2} \end{cases}$$

となる。したがって Q_n の座標は $\left(\frac{p_n}{1+m^2}, \frac{mp_n}{1+m^2}\right)$ ， P_{n+1} の座標は $\left(\frac{p_n}{1+m^2}, 0\right)$ となる。ここで P_{n+1} の座標は $(p_{n+1}, 0)$ でもあるので

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{1+m^2}$$

が成り立つ。したがって数列 $\{p_n\}$ は初項1，公比 $\frac{1}{1+m^2}$ の等比数列となるので

$$p_n = \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^{n-1}$$

となる。以上から $P_n\left(\left(\frac{1}{1+m^2}\right)^{n-1}, 0\right)$ ， $Q_n\left(\left(\frac{1}{1+m^2}\right)^n, m\left(\frac{1}{1+m^2}\right)^n\right)$ ， $P_{n+1}\left(\left(\frac{1}{1+m^2}\right)^n, 0\right)$

となるので

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^n \right\} \cdot m \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^n \\ = S_1 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2 \right\}^{n-1}$$

が成り立つ。ここで

$$\sum_{n=1}^N S_n = S_1 \cdot \sum_{n=1}^N \left\{ \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2 \right\}^{n-1} \\ = S_1 \cdot \frac{1 - \left\{ \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2 \right\}^N}{1 - \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2}$$

となる。 $0 < \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2 < 1$ なので， $N \rightarrow \infty$ のとき $\left\{ \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2 \right\}^N \rightarrow 0$ となるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_1 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2} \\ = S_1 \cdot \frac{(1+m^2)^2}{(1+m^2)^2 - 1} \\ = \frac{m^3}{2(1+m^2)^2} \cdot \frac{(1+m^2)^2}{m^4 + 2m^2} \\ = \frac{m}{2(m^2 + 2)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{m}{2(m^2 + 2)}$$

問3

$S = \frac{m}{2(m^2 + 2)}$ を m で微分すると

$$S' = \frac{(m^2 + 2) - m \cdot 2m}{2(m^2 + 2)^2} \\ = \frac{2 - m^2}{2(m^2 + 2)^2}$$

となる。したがって増減表を書くと以下のようになる。

m	0	...	$\sqrt{2}$	...
S'	$\times$	+	0	-
S	$\times$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

増減表から $m = \sqrt{2}$ のとき最大値

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2(2+2)} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad m = \sqrt{2} \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{2}}{8}$$

第 6 問

問 1

$$P_1(t - \sin t, 1 - \cos t), P_2(t - \sin t, 1 + \cos t)$$

とおく。 t を固定したとき、 P_1 と P_2 の x 座標は同じである。

さらに、 P_1 と P_2 の中点の y 座標は

$$\frac{(1 - \cos t) + (1 + \cos t)}{2} = 1$$

である。以上より、題意は示された。

(証明終)

問 2

P_1 と P_2 の x 座標は常に等しい。 P_1 と P_2 の y 座標が等しいとき

$$1 - \cos t = 1 + \cos t$$

$$\Leftrightarrow \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

となる。以上から C_1 と C_2 の交点は $\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right), \left(\frac{3\pi}{2} + 1, 1\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right), \left(\frac{3\pi}{2} + 1, 1\right)$$

問 3

問 2 より、 C_1 と C_2 に囲まれた部分は $\frac{\pi}{2} - 1 \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 1$ の部分である。

また、この範囲において

$$0 \leq 1 + \cos t \leq 1 - \cos t$$

が成り立つので、求める体積を V とおくと

$$V = \pi \int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{3\pi}{2}+1} \left\{ (1 - \cos t)^2 - (1 + \cos t)^2 \right\} dx$$

となる。ここで $x = t - \sin t$ から

$$dx = (1 - \cos t) dt$$

x	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\rightarrow$	$\frac{3\pi}{2} + 1$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$

となるので

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-4 \cos t)(1 - \cos t) dt \\ &= 4\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos^2 t - \cos t) dt \\ &= 4\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} - \cos t \right) dt \\ &= 4\pi \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t - \sin t \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= 4\pi \left\{ \left(\frac{3\pi}{4} + 1 \right) - \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \right\} \\ &= 2\pi(\pi + 4) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2\pi(\pi + 4)$$

(参考)

曲線を図示すると、次図のようになる。

