

第 1 問

問 1

2 枚のカードがどのような組み合わせであってもその組み合わせが出る確率はそれぞれ等しい。特定の 2 枚が出る確率は

$$\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

である。よって、求める期待値は

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}\{(1+2)+(1+3)+\cdots+(4+5)\}&=\frac{1}{10}\times 60\\&=6\end{aligned}$$

である。

(答) 6

問 2

積が偶数となる確率の余事象は積が奇数となる確率である。 k 枚のカードに書かれた番号の積が奇数になるのは、 k 枚全ての番号が奇数になるときのみである。 n 枚の中に奇数は $\frac{n}{2}$ 枚あるから、積が奇数になる確率は

$$\frac{{}_{\frac{n}{2}}C_k}{{}_nC_k}$$

であるから、求める確率は

$$1-\frac{{}_{\frac{n}{2}}C_k}{{}_nC_k}$$

である。

(答) $1-\frac{{}_{\frac{n}{2}}C_k}{{}_nC_k}$

問 3

条件を満たすような取り出し方は、「3 枚全てが偶数」または「1 枚が偶数であり残り 2 枚が奇数」となるような取り出し方である。

[1] 3 枚全てが偶数となるとき

求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_{\frac{n}{2}}C_3}{{}_nC_3}&=\frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\frac{3!}{n(n-1)(n-2)}}\\&=\frac{n(n-2)(n-4)}{8n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{n-4}{8(n-1)}\end{aligned}$$

となる。

[2] 1 枚が偶数であり残り 2 枚が奇数となるとき

求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_{\frac{n}{2}}C_1\times {}_{\frac{n}{2}}C_2}{{}_nC_3}&=\frac{\frac{n}{2}\cdot \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2!}}{\frac{3!}{n(n-1)(n-2)}}\\&=\frac{3n^2(n-2)}{8n(n-1)(n-2)}\\&=\frac{3n}{8(n-1)}\end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2]は互いに排反であるから、求める確率は

$$\frac{n-4}{8(n-1)}+\frac{3n}{8(n-1)}=\frac{1}{2}$$

である。

(答) $\frac{1}{2}$

第 2 問

問 1

第 m 群の最後の数がこの数列の第 L_m 項であるとする

$$\begin{aligned} L_m &= \sum_{k=1}^m (2k-1) \\ &= m^2 \end{aligned}$$

である。第 n 項の数が n^2 であることより、 $625 = 25^2$ から 625 はこの数列の第 25 項の数である。
よって、625 が第 m 群に含まれるとき

$$\begin{aligned} (m-1)^2 &< 25 \leq m^2 \\ \Leftrightarrow m &= 5 \end{aligned}$$

となるから、625 は第 5 群の $25 - 4^2 = 9$ 番目の数である。

(答) 第 5 群の 9 番目

問 2

第 n 群の最後数は、 $(L_n)^2 = n^4$ である。

(答) n^4

問 3

第 $n-1$ 群の最後数はこの数列の第 L_{n-1} 項、つまり第 $(n-1)^2$ 項であるから、第 n 群の最初の数はその次の項の数であり

$$\left\{ (n-1)^2 + 1 \right\}^2 = (n^2 - 2n + 2)^2$$

である。

(答) $(n^2 - 2n + 2)^2$

問 4

第 n 群の前から p 番目 ($1 \leq p \leq 2n-1$) の数を $a_{n,p}$ とおくと、その値は

$$\begin{aligned} a_{n,p} &= \left\{ (n-1)^2 + p \right\}^2 \\ &= p^2 + 2(n-1)^2 p + (n-1)^4 \end{aligned}$$

と表せる。よって第 n 群に含まれる数の和は、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{2n-1} a_{n,p} \\ &= \sum_{p=1}^{2n-1} \left\{ p^2 + 2(n-1)^2 p + (n-1)^4 \right\} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2n(2n-1)(4n-1) + \frac{2(n-1)^2}{2} \cdot 2n(2n-1) + (n-1)^4(2n-1) \\ &= \frac{1}{3}(2n-1) \left\{ n(4n-1) + 6n(n-1)^2 + 3(n-1)^4 \right\} \\ &= \frac{1}{3}(2n-1)(3n^4 - 6n^3 + 10n^2 - 7n + 3) \end{aligned}$$

となる。また上の式に $n=1$ を代入すると $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot (3 - 6 + 10 - 7 + 3) = 1$ となるから、 $n=1$ のときも

成り立つ。よって求める和は $\frac{1}{3}(2n-1)(3n^4 - 6n^3 + 10n^2 - 7n + 3)$ である。

(答) $\frac{1}{3}(2n-1)(3n^4 - 6n^3 + 10n^2 - 7n + 3)$

第3問

問1

△ABDに余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}AD^2 &= 1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

問2

△DPQ = △ABC - △APQ - △BPD - △CQD と表せるから

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times x \times (1-x) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times (1-x) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} (3x^2 - 4x + 2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{\sqrt{3}}{12} (3x^2 - 4x + 2)$$

問3

問2の結果より

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{18}$$

と変形できるから、 $0 \leq x \leq 1$ のとき S は

$$x=0 \text{ のとき最大値 } \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$x=\frac{2}{3} \text{ のとき最小値 } \frac{\sqrt{3}}{18}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \frac{\sqrt{3}}{6}, \text{ 最小値 } \frac{\sqrt{3}}{18}$$

問4

問2の S の値が $\frac{\sqrt{3}}{8}$ となるとき

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{8} &= \frac{\sqrt{3}}{12} (3x^2 - 4x + 2) \\ \Leftrightarrow 6x^2 - 8x + 1 &= 0\end{aligned}$$

となるから、 $0 \leq x \leq 1$ においてこの式を満たす x の値は

$$x = \frac{4 - \sqrt{10}}{6}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{4 - \sqrt{10}}{6}$$

第 4 問

問 1

$$\begin{aligned}f(x) &= x^3 - 3x^2 + 2 \text{ のとき} \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x \\ &= 3x(x-2)\end{aligned}$$

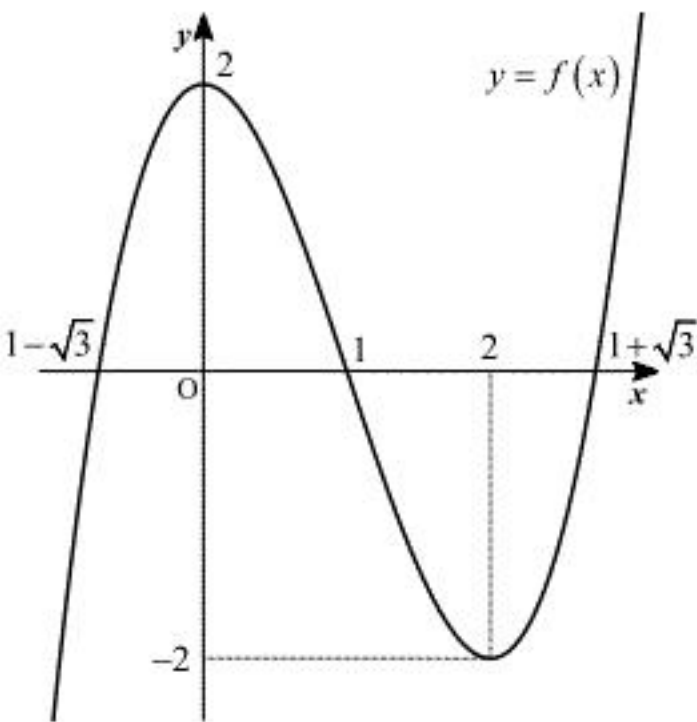
であるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

以上より、 $y=f(x)$ は $x=0$ のとき極大値 2、 $x=2$ のとき極小値 -2 をとる。さらに、 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 1 \pm \sqrt{3}\end{aligned}$$

となるから、グラフの概形は下図のようになる。



(答) 増減：前表，極値：極大値 2 ($x=0$ のとき)，極小値 -2 ($x=2$ のとき)，グラフ：前図

問 2

$$\begin{aligned}f(x) &= 2 \text{ となるような } x \text{ の値は} \\ x^3 - 3x^2 + 2 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 3\end{aligned}$$

である。よって、 $a > 0$ である a について $-\frac{a}{2} < 0 < a$ であるから $-\frac{a}{2} \leq x \leq a$ における $f(x)$ の最大値 M は

$$\begin{aligned}0 < a \leq 3 \text{ のとき } M &= 2 \\ a > 3 \text{ のとき } M &= f(a) = a^3 - 3a^2 + 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $0 < a \leq 3$ のとき $M = 2$ ， $a > 3$ のとき $M = a^3 - 3a^2 + 2$

問 3

$$\begin{aligned}f(x) &= -2 \text{ となるような } x \text{ の値は} \\ x^3 - 3x^2 + 2 &= -2 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 2\end{aligned}$$

である。

[1] $0 < a < 2$ のとき

$$-1 < -\frac{a}{2} < a < 2 \text{ であり}$$

$$\begin{aligned}f(a) - f\left(-\frac{a}{2}\right) &= (a^3 - 3a^2 + 2) - \left(-\frac{1}{8}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + 2\right) \\ &= \frac{9}{8}a^3 - \frac{9}{4}a^2 \\ &= \frac{9}{8}a^2(a-2) \\ &< 0\end{aligned}$$

であるから、 $f(a) < f\left(-\frac{a}{2}\right)$ となる。よって、 $-\frac{a}{2} \leq x \leq a$ における $f(x)$ の最小値 m は

$$\begin{aligned}m &= f(a) \\ &= a^3 - 3a^2 + 2\end{aligned}$$

となる。

[2] $a \geq 2$ のとき

$-\frac{a}{2} \leq -1, 2 \leq a$ であるから $f\left(-\frac{a}{2}\right) \leq f(-1), f(2) \leq f(a)$ となる。よって、 $-\frac{a}{2} \leq x \leq a$ における $f(x)$ の最小値 m は

$$\begin{aligned}m &= f\left(-\frac{a}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{8}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $0 < a < 2$ のとき $m = a^3 - 3a^2 + 2$ ， $a \geq 2$ のとき $m = -\frac{1}{8}a^3 - \frac{3}{4}a^2 + 2$

第 5 問

問 1

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから

$$A^2 = O$$

を満たすとき

$$\begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって、 $c \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= -\frac{a^2}{c} \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad b = -\frac{a^2}{c}$$

問 2

①より、 $c = 0$ のとき

$$\begin{aligned} a^2 &= 0, d^2 = 0 \\ \Leftrightarrow a &= 0, d = 0 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a = 0, d = 0$$

問 3

問 2 の結果より、 $c = 0$ のとき、 $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。 $X_1 = E, X_{n+1} = AX_n + B \ (n = 1, 2, \dots)$ のとき

$$\begin{aligned} X_2 &= AX_1 + B \\ &= AE + B \\ &= A + B \\ X_3 &= AX_2 + B \\ &= A(A + B) + B \\ &= AB + B \ (\because A^2 = O) \\ X_4 &= AX_3 + B \\ &= A(AB + B) + B \\ &= AB + B \ (\because A^2 = O) \end{aligned}$$

となるから、帰納的に考えて

$$X_1 = E, X_2 = A + B, X_n = AB + B \ (n = 3, 4, \dots)$$

である。よって

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + \cdots + X_n &= E + (A + B) + (n-2)(AB + B) \\ &= (n-2)AB + (n-1)B + A + E \\ &= (n-2) \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (n-2) \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (n-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-2)b + n & (n-1)b + n - 1 \\ n - 1 & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \begin{pmatrix} (n-2)b + n & (n-1)b + n - 1 \\ n - 1 & n \end{pmatrix}$$

第 6 問

問 1

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-x} \text{ とおくと} \\ f'(x) &= -e^{-x}\end{aligned}$$

であるから、 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y &= f'(t)(x-t) + e^{-t} \\ &= -e^{-t}x + (t+1)e^{-t}\end{aligned}$$

である。この接線が点 $Q(u, 0)$ を通るとき

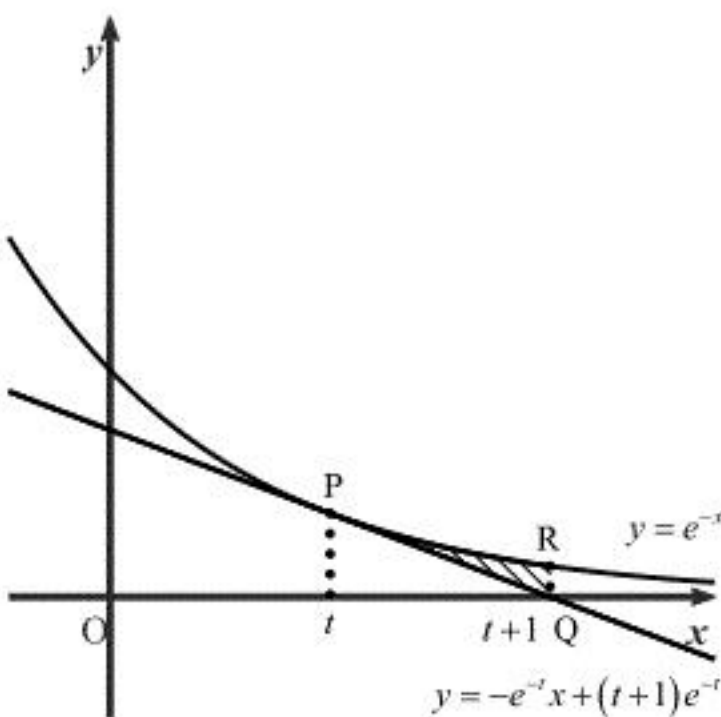
$$\begin{aligned}0 &= -e^{-t}u + (t+1)e^{-t} \\ \Leftrightarrow u &= t+1 \left(\because e^{-t} \neq 0 \right)\end{aligned}$$

である。

(答) $u = t+1$

問 2

問 1 より、グラフは以下のようになる。



求める体積は、上の図の斜線部を x 軸周りに回転させたものであるから、

$$\begin{aligned}V &= \int_t^{t+1} \pi \left(e^{-x} \right)^2 dx - \frac{1}{3} \times 1 \times \left(e^{-t} \right)^2 \pi \\ &= \left[-\frac{\pi}{2} \cdot e^{-2x} \right]_t^{t+1} - \frac{\pi}{3} e^{-2t} \\ &= \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) e^{-2t}\end{aligned}$$

である。

(答) $V = \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) e^{-2t}$

問 3

$$\begin{aligned}t_{n+1} &= u(t_n) \\ &= t_n + 1\end{aligned}$$

より、数列 $\{t_n\}$ は初項 $t_1 = 0$ 、公差の等差数列である。よって

$$t_n = n-1$$

である。

(答) $t_n = n-1$

問 4

$$\begin{aligned}V_{n+1} &= V(t_{n+1}) \\ &= V(n) \\ &= \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) e^{-2n} \\ &= \frac{1}{e^2} \cdot \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) e^{-2(n-1)} \\ &= \frac{1}{e^2} V(n-1) \\ &= \frac{1}{e^2} V_n\end{aligned}$$

となるから、数列 $\{V_n\}$ は初項 $V_1 = V(0) = \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right)$ 、公比 $\frac{1}{e^2}$ の等比数列である。 $\left| \frac{1}{e^2} \right| < 1$ であるから、無限等比級数 $V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \cdots$ は収束し、その和は

$$\begin{aligned}V_1 + V_2 + \cdots + V_n + \cdots &= \frac{\pi}{6} \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e^2}} \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{6} \cdot \frac{e^2 - 3}{e^2 - 1}$