

第 1 問

偶数が出る確率, 奇数が出る確率ともに, $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である。

問 1

$P_4 = 2$ となるのは偶数が 3 回, 奇数が 1 回出たときである。したがって求める確率は, 4 回のうち何回目に偶数が出るかを考えて,

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^1 = \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4}$

問 2

8 回投げて偶数の目が k 回出たとすると, 奇数の目は $8-k$ 回出たことになるから, $P_8 = n$ となるとき,

$$\begin{aligned} k \cdot 1 + (8-k) \cdot (-1) &= n \\ \Leftrightarrow 2k - 8 &= n \end{aligned}$$

となる。 n が奇数のとき, 上式を満たす自然数 k は存在しない。 n が偶数のとき,

$$k = \frac{8+n}{2}$$

であるから, 求める確率は偶数の目が何回出るかを考えて,

$$\frac{{}_8C_{\frac{8+n}{2}}}{2^8}$$

となる。

(答) n が奇数: 0, n が偶数: $\frac{{}_8C_{\frac{8+n}{2}}}{2^8}$

問 3

さいころの目が偶数か奇数かだけを考えると, 4 回の試行の全ての場合の数は 16 通りとなる。偶数の目を +, 奇数の目を - で表すと, 0 以上になるのは

(+, +, +, +),
(+, +, +, -), (+, +, -, +), (+, -, +, +), (-, +, +, +),
(+, +, -, -), (+, -, +, -), (+, -, -, +), (-, +, +, -)

の 9 通りである。したがって, 求める確率は

$$\frac{9}{16}$$

である。

(答) $\frac{9}{16}$

問 4

さいの目が偶数か奇数かだけを考えると, 3 回の試行の全ての場合の数は 8 通りとなる。偶数の目を +, 奇数の目を - で表してそれらを書き出すと

(+, +, +),
(+, +, -), (+, -, +), (-, +, +),
(+, -, -), (-, +, -), (-, -, +),
(-, -, -)

となり, これら 8 通りについて, 全て各々の事象が起こる確率は $\frac{1}{8}$ で等しい。

したがってこの 8 つについて, $P_1 + P_2 - P_3$ に事象の確率をかけたものを全て足し合わせて

$$0 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{8} + (-2) \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{8} + (-2) \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{8} = 0$$

が求める期待値となる。

(答) 0

第 2 問

問 1

$n=1$ の時を考えると

$$S_2 + S_1 = \frac{1}{3}(S_2 - S_1)^2$$

となり, $S_1 = a_1 = 3$ なので

$$S_2 + 3 = \frac{1}{3}(S_2 - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow S_2^2 - 9S_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow S_2(S_2 - 9) = 0$$

$$\therefore S_2 = 9 \quad (\because S_2 > S_1)$$

である。 S_3 についても同様にして

$$S_3 + 9 = \frac{1}{3}(S_3 - 9)^2$$

$$\Leftrightarrow S_3^2 - 21S_3 + 54 = 0$$

$$\Leftrightarrow (S_3 - 3)(S_3 - 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow S_3 = 18 \quad (\because S_3 > S_2)$$

と求まる。

(答) $S_2 = 9, S_3 = 18$

問 2

$$S_{n+1} + S_n = \frac{1}{3}(S_{n+1} - S_n)^2$$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

であり, これらは, 形式的に, $S_0 = 0$ とおけば, $n \geq 0$ で成り立つ。これらから,

$$a_{n+1} + 2S_n = \frac{1}{3}a_{n+1}^2 \quad (n \geq 0)$$

となる。同様に,

$$a_n + 2S_{n-1} = \frac{1}{3}a_n^2 \quad (n \geq 1)$$

となるので, 前式と両辺引き算して, $n \geq 1$ において,

$$a_{n+1} - a_n + 2a_n = \frac{1}{3}a_{n+1}^2 - \frac{1}{3}a_n^2$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} + a_n = \frac{1}{3}a_{n+1}^2 - \frac{1}{3}a_n^2$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 3a_{n+1} - a_n(a_n + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 3) = 0$$

がなりたつ。いま, $a_n > 0$ なので $a_{n+1} = a_n + 3$ となる。

(答) $a_{n+1} = a_n + 3$

問 3

$a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 3$ なので

$$a_n = 3n$$

である。よって

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n 3k \\ &= \frac{3}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n = \frac{3}{2}n(n+1)$

第3問

問1

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}$ を利用して変形すると

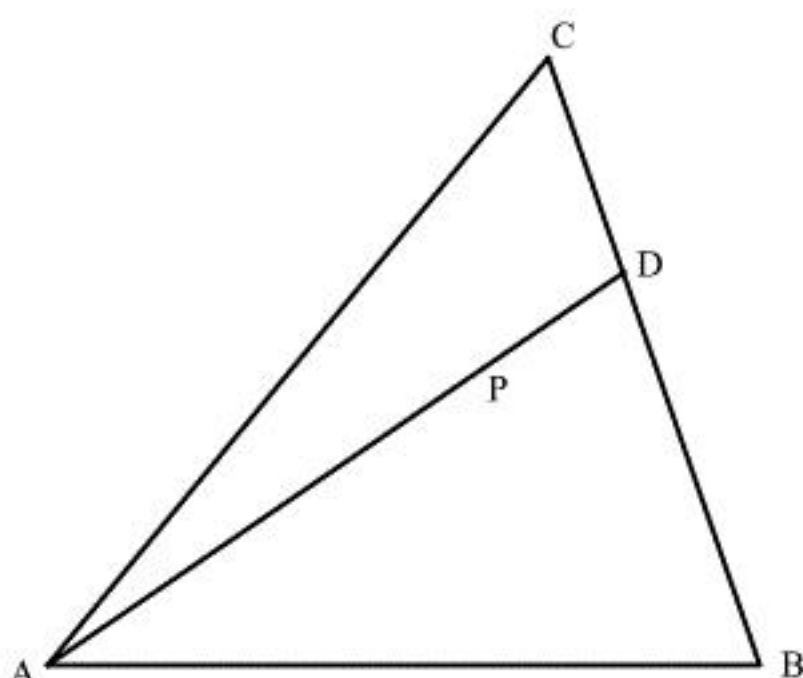
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{AP} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AP} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

問2

問題文の状況を図示すると以下のようになる。



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\text{AP} : \text{AD} &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) : 1 \\ &= 3 : 4\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\text{AP} : \text{PD} = 3 : 1$$

$\overrightarrow{AD}$ は $\overrightarrow{AP}$ の $\frac{4}{3}$ 倍なので $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ となる。なので

$$\text{BD} : \text{DC} = 2 : 1$$

である。

$$\text{(答)} \quad \text{AP} : \text{PD} = 3 : 1, \text{BD} : \text{DC} = 2 : 1$$

問3

$\triangle PBC$ における正弦定理より、

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin \angle BPC} &= 2 \cdot 1 \\ \Leftrightarrow BC &= 2 \sin 120^\circ \\ \therefore BC &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \sqrt{3}$$

問4

$\triangle PBC$ の外接円の中心を O とすると、円周角と中心角の関係より、 $\angle BPC$ に対する中心角は 240° である。このとき、

$$\angle BPC = 120^\circ$$

であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。問2より

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}$$

であるから、 OD の長さは

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OD}|^2 &= \left| \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} \right|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{4}{9}|\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= \frac{1}{9} \cdot 1 + \frac{4}{9} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{4}{9} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3} \\ \therefore |\overrightarrow{OD}| &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

となる。点 P が直線 OD 上にあることから、 $|\overrightarrow{OP}| = 1$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \sqrt{3}\overrightarrow{OD} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} &= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) \\ &= \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OC} \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB} - \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}\overrightarrow{OC} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3} - 1}{3}|\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{7 - 3\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3}|\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

第4問

問1

$x<0$ のときは

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-3}^x (t^2 + 2t) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 + t^2 \right]_{-3}^x \\ &= \frac{1}{3} x^3 + x^2 \end{aligned}$$

$$F'(x) = x^2 + 2x$$

であり、 $x \geq 0$ のときは

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-3}^0 (x^2 + 2x) dx + \int_0^x (-2x^2 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_{-3}^0 + \left[-\frac{2}{3} x^3 + x^2 \right]_0^x \\ &= -\frac{2}{3} x^3 + x^2 \end{aligned}$$

$$F'(x) = -2x^2 + 2x$$

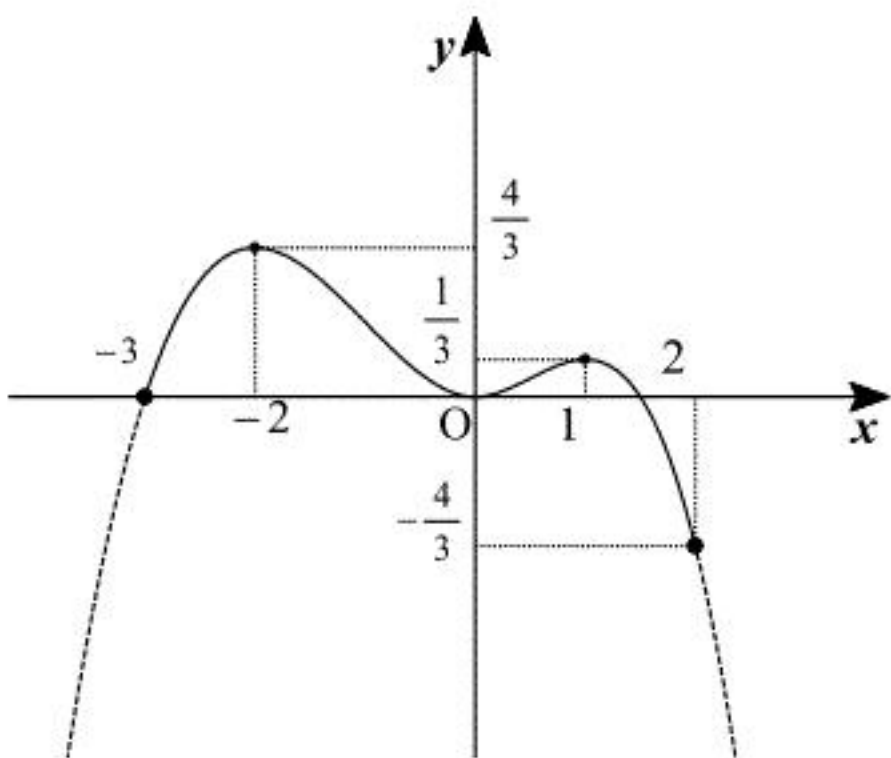
である。 $F'(x) = 0$ とすると $x = -2, 0, 1$ となり、

$$F(-3) = 0, F(2) = -\frac{4}{3}$$

であるので、増減表は以下のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$

したがってグラフの概形は下のようになる。



(答)前図

問2

$$F'(a) = -2a^2 + 2a$$

グラフより、 $F'(a) = F'(b)$ となり、かつ $b < 0$ となるのは $-3 < b < -2$ のときである。

$-3 < b < -2$ のとき、2点PとQにおけるCの接線の傾きが等しいので

$$F'(a) = -2a^2 + 2a = b^2 + 2b = F'(b)$$

となり、また

$$\begin{aligned} F'(a) &= -2a^2 + 2a \\ &= -2 \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} > 0 \quad (0 < a < 1) \end{aligned}$$

となるので、 $F'(a)$ が $0 < a < 1$ において取りうる値は $0 < F'(a) \leq \frac{1}{2}$ である。

なので求める値は

$$0 < b^2 + 2b \leq \frac{1}{2}$$

を満たすような b の範囲、つまり

$$0 < b^2 + 2b, b^2 + 2b \leq \frac{1}{2}$$

を満たす b の範囲である。 $b^2 + 2b = (b+1)^2 - 1$ なので求める範囲は

$$\begin{aligned} 0 < b^2 + 2b \\ \Leftrightarrow 0 < (b+1)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow b+1 < -1, 1 < b+1 \\ \Leftrightarrow b < -2, 0 < b \end{aligned}$$

かつ

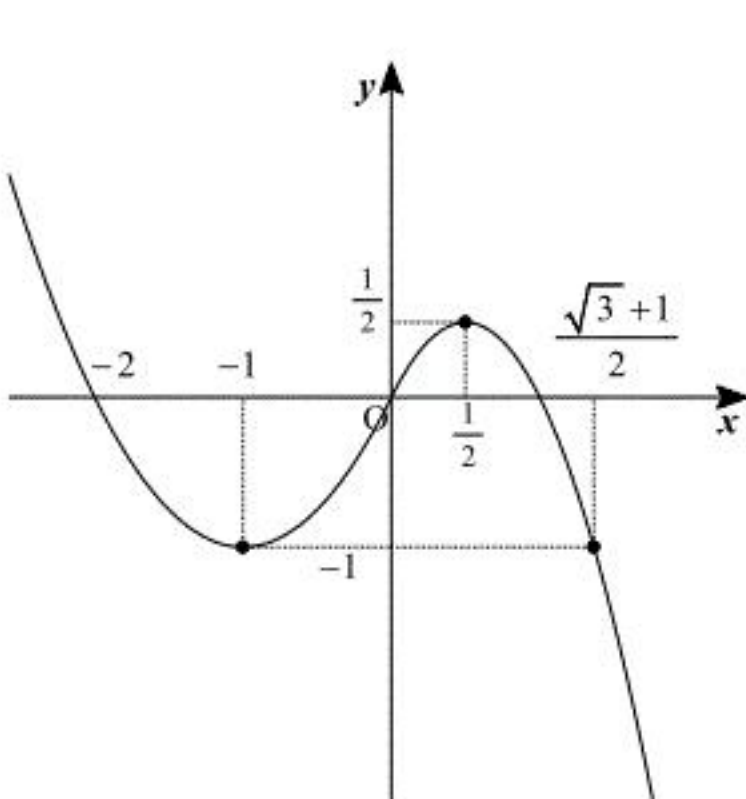
$$\begin{aligned} b^2 + 2b &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2b^2 + 4b - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} &\leq b \leq \frac{-2 + \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

である。つまり求める b の範囲は $\frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \leq b < -2$ である。

$$(答) \frac{-2 - \sqrt{6}}{2} \leq b < -2$$

問3

$y = F'(x)$ 、つまり $y = f(x)$ のグラフを描くと以下のようになる。



P, Q, Rにおける接線の傾きが等しい値 k であるとすれば、このとき、直線 $y = k$ は $y = f(x)$

のグラフと相異なる3点で交わるので、 $-1 < k < \frac{1}{2}$ である。直線 $y = k$ と $y = f(x)$ のグラフ

の3つの交点の x 座標が大きい方から順に a, b, c となるので、 $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ となる。さら

さらに、 $a - b = b - c$ であるとき、もし $c < -2, 0 < b < \frac{1}{2} < a < 1$ ならば $a - b < 1$ かつ $b - c > 2$ と

なり矛盾する。したがって $-2 < c < -1 < b < 0, 1 < a < \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ である。このとき、2点

$(b, k), (c, k)$ は $y = x^2 + 2x$ の軸である、直線 $x = -1$ に関して対称であるから、

$$\frac{b+c}{2} = -1 \quad \therefore c = -b-2$$

となる。これと、 $a - b = b - c$ より、 $b = \frac{a-2}{3}$ とともまる。したがって、 $f(a) = f(b) (= k)$ から、

$$\begin{aligned} -2a^2 + 2a &= \left(\frac{a-2}{3} \right)^2 + 2 \left(\frac{a-2}{3} \right) \\ \Leftrightarrow 9(-2a^2 + 2a) &= (a^2 - 4a + 4) + 6(a-2) \\ \Leftrightarrow 19a^2 - 16a - 8 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{8 \pm 6\sqrt{6}}{19} \end{aligned}$$

となり、 $0 < a < 1$ であることから、 $a = \frac{8+6\sqrt{6}}{19}$ が求める答である。

$$(答) \frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}+1}{2}, a = \frac{8+6\sqrt{6}}{19}$$

第 5 問

問 1

QR は x 軸と平行なので

$$OQ=r\sin\theta$$

である。よって直線 AQ は傾きが $-\frac{r\sin\theta}{a}$ 、 y 切片が $r\sin\theta$ の直線である。

よって求める方程式は

$$y=-\frac{r\sin\theta}{a}x+r\sin\theta$$

である。

(答) $y=-\frac{r\sin\theta}{a}x+r\sin\theta$

問 2

r を使わずに Q の座標ならびに R の座標を表す。P から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると、 $\triangle APH$ と $\triangle AQO$ の相似より、Q の y 座標 y_Q は

$$\begin{aligned}y_Q &= PH \cdot \frac{OA}{HA} \\&= (OP \times \sin\theta) \cdot \frac{a}{a-OP\cos\theta} \\&= \frac{a\sin\theta}{a-\cos\theta}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}r &= OQ \cdot \frac{1}{\sin\theta} \\&= \frac{a}{a-\cos\theta}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}R(x_R, y_R) &= (r\cos\theta, r\sin\theta) \\&= \left(\frac{a\cos\theta}{a-\cos\theta}, \frac{a\sin\theta}{a-\cos\theta}\right)\end{aligned}$$

である。また、 $\sqrt{x_R^2+y_R^2}=\frac{a}{a-\cos\theta}$ であるので

$$\cos\theta=a\left(1-\frac{1}{\sqrt{x_R^2+y_R^2}}\right)$$

となり

$$\begin{aligned}x_R &= \frac{a\cos\theta}{a-\cos\theta} \\&= \frac{a \cdot a\left(1-\frac{1}{\sqrt{x_R^2+y_R^2}}\right)}{a-a\left(1-\frac{1}{\sqrt{x_R^2+y_R^2}}\right)} \\&= a\left(\sqrt{x_R^2+y_R^2}-1\right)\end{aligned}$$

となるのでこれを整理して

$$\frac{a^2-1}{a^2}\left(x_R-\frac{a}{a^2-1}\right)^2+y_R^2=\frac{a^2}{a^2-1}$$

となる。点 P が動くのは $y>0$ の範囲なので、OP 上にある点 R も動く範囲は $y>0$ となる。

なので求める方程式は $\frac{a^2-1}{a^2}\left(x-\frac{a}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{a^2-1} (y>0)$ である。

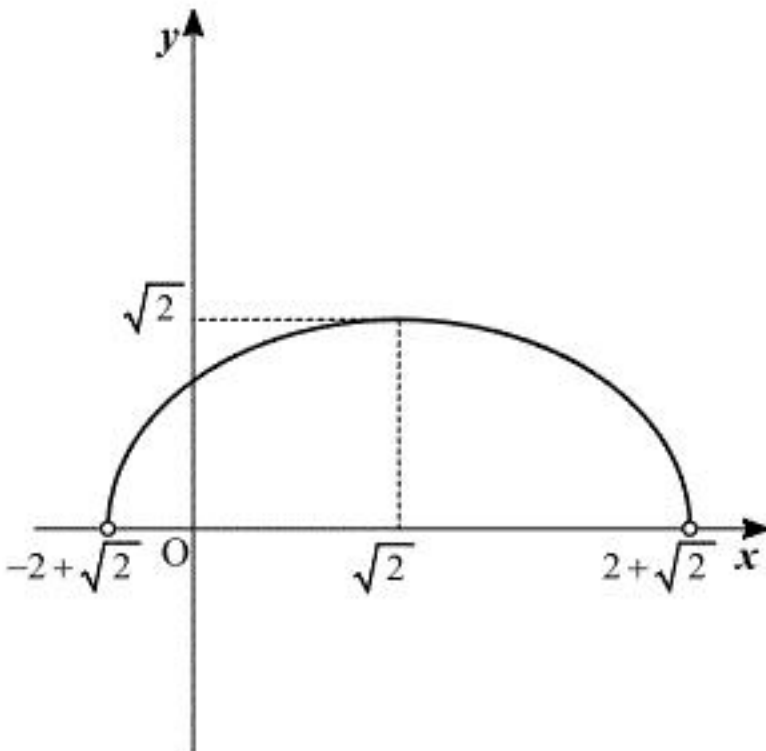
(答) $\frac{a^2-1}{a^2}\left(x-\frac{a}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{a^2-1} (y>0)$

問 3

$a=\sqrt{2}$ の時、点 R の描く曲線は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x-\sqrt{2})^2+y^2 &= 2 \ (y>0) \\ \Leftrightarrow \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} &= 1 \ (y>0)\end{aligned}$$

となる。よってこの概形は以下のようになる。



(答) 前図

第 6 問

問 1

C 上の点 (x_1, y_1) における接線の傾きは $-\frac{x_1}{y_1}$ であるので、点 $(x_1, f(x_1))$ における $y = f(x)$ の

接線の傾きは $\frac{y_1}{x_1}$ となる。

つまり

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \frac{y_1}{x_1} \\ &= \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{x_1} \quad (\because x_1^2 + x_2^2 = 1, y_1 > 0) \end{aligned}$$

となるので

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

である。

$$\text{(答)} \quad f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

問 2

点 P の座標を $(t, f(t))$ ($0 < t < 1$) とすると接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x - \sqrt{1-t^2} + f(t) \end{aligned}$$

となる。したがって点 Q の座標は $(0, -\sqrt{1-t^2} + f(t))$ となる。

よって線分 PQ の長さは

$$\begin{aligned} \sqrt{(t-0)^2 + \left\{ f(t) - (-\sqrt{1-t^2} + f(t)) \right\}^2} &= \sqrt{t^2 + (\sqrt{1-t^2})^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり、これで題意は示された。

(証明終)

問 3

接線の y 切片の座標は $(0, -\sqrt{1-t^2} + f(t))$ 、 x 切片の座標は $\left(t - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}f(t), 0\right)$ である。

今点 P が、 $S = -tf(t)$ が最大になる位置にあるとする。

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -f(t) - tf'(t) \\ &= -f(t) - \sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

である。また、曲線 $y = f(x)$ ($0 < x < 1$) は第 4 象限にあるので $f(x) < 0$ ($0 < x < 1$) である。 S を

最大にする点 P の位置が存在するので、そこでは $\frac{dS}{dt} = -f(t) - \sqrt{1-t^2} = 0$ になっている。つ

まり、 $f(t) = -\sqrt{1-t^2}$ であるので接線の y 切片の座標は $(0, -2\sqrt{1-t^2})$ 、 x 切片の座標は

$(2t, 0)$ となる。点 P の座標は $(t, f(t))$ なので、これは二つの点の midpoint になっていることがわ

かる。

これで題意は示された。

(証明終)

問 4

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

であるので

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\sqrt{1-x^2} = t$, $\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{\sqrt{1-x^2}}$ と置換して、 C を積分定数とすると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\ &= \int \left(-\frac{t^2}{1-t^2}\right) dt \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{1-t^2}\right) dt \\ &= \int \left\{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\right\} dt \\ &= t + \frac{1}{2} \log \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C \\ &= \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + C \\ &= \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \log \frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{1-(1-x^2)} + C \\ &= \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \log \frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2} + C \\ &= \sqrt{1-x^2} + \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C \end{aligned}$$

となる。これと $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0$ より、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sqrt{1-x^2} + \log \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} + C \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 + \log \frac{1}{1} + C &= 0 \\ \therefore C &= 0 \end{aligned}$$

となる。よって

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \log \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right)$$

である。

$$\text{(答)} \quad f(x) = \sqrt{1-x^2} + \log \left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \right)$$