

第1問

問1

$c$ と $d$ が隣り合うから、この2人をセットで考えて、あとで2人の順番を考えればよい。したがって、求める場合の数は、

$$7! \cdot 2 = 10080 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 10080 通り

問2

Aの部屋に入る人の選び方は、

$${}_8C_3 = 56 \text{ (通り)}$$

である。残り5人についての部屋の割り振り方は以下の表の通りになる。

| B | C | 場合の数  |
|---|---|-------|
| 0 | 5 | 1 通り  |
| 1 | 4 | 5 通り  |
| 2 | 3 | 10 通り |
| 3 | 2 | 10 通り |
| 4 | 1 | 5 通り  |

以上より、求める場合の数は、

$$56 \cdot (1 + 5 + 10 + 10 + 5) = 1736 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 1736 通り

問3

残り6人について考える。Aに入るのが $c$ と $d$ のみの場合のときの部屋の割り振り方は以下の表の通りになる。

| A | B | C | 場合の数  |
|---|---|---|-------|
| 0 | 1 | 5 | 6 通り  |
| 0 | 2 | 4 | 15 通り |
| 0 | 3 | 3 | 20 通り |
| 0 | 4 | 2 | 15 通り |

次に、Aに $c$ と $d$ 以外にもう1人割り振られる場合、部屋の割り振り方は以下の表の通りになる。これは、問2の表のそれぞれにAに入る人の選び方の6通りをかければよい。

| A | B | C | 場合の数  |
|---|---|---|-------|
| 1 | 0 | 5 | 6 通り  |
| 1 | 1 | 4 | 30 通り |
| 1 | 2 | 3 | 60 通り |
| 1 | 3 | 2 | 60 通り |
| 1 | 4 | 1 | 30 通り |

したがって、求める場合の数は、

$$(6 + 15 + 20 + 15) + (6 + 30 + 60 + 60 + 30) = 242 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 242 通り

問4

Aに入る人数によって場合分けして考える。Aに3人が入る場合は問2の通りである。

[1] Aに2人が入る場合

Aの部屋に入る人の選び方は、

$${}_8C_2 = 28 \text{ (通り)}$$

である。残り6人についての部屋の割り振り方は以下の表の通りになる。

| B | C | 場合の数  |
|---|---|-------|
| 1 | 5 | 6 通り  |
| 2 | 4 | 15 通り |
| 3 | 3 | 20 通り |
| 4 | 2 | 15 通り |

したがって、このときの場合の数は、

$$28 \cdot (6 + 15 + 20 + 15) = 1568 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] Aに1人が入る場合

Aの部屋に入る人の選び方は、

$${}_8C_1 = 8 \text{ (通り)}$$

である。残り7人についての部屋の割り振り方は以下の表の通りになる。

| B | C | 場合の数  |
|---|---|-------|
| 2 | 5 | 21 通り |
| 3 | 4 | 35 通り |
| 4 | 3 | 35 通り |

したがって、このときの場合の数は、

$$8 \cdot (21 + 35 + 35) = 728 \text{ (通り)}$$

となる。

[3] Aに0人が入る場合

8人についての部屋の割り振り方は以下の表の通りになる。

| B | C | 場合の数  |
|---|---|-------|
| 3 | 5 | 56 通り |
| 4 | 4 | 70 通り |

したがって、このときの場合の数は、

$$126 \text{ (通り)}$$

となる。

以上より、求める場合の数は、

$$1736 + 1568 + 728 + 126 = 4158 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 4158 通り

## 第2問

### 問1

1行目の数字をあげると、

$$1, 3, 7, 13, 21, \dots$$

となっている。この数列の項間の差をとると、

$$2, 4, 6, 8, \dots$$

となる。この数列は初項が2、公差が2の等差数列となっている。したがって、数列 $\{a_{l,n}\}$ は

階差数列となり、求める数列の $n \geq 2$ における一般項は、

$$\begin{aligned} a_{l,n} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n^2 - n + 1 \end{aligned}$$

となる。これは、 $n=1$ のときも満たしている。

$$(\text{答}) \quad a_{l,n} = n^2 - n + 1$$

### 問2

第 $n$ 群を作る数字を数列と見ると、公差は2の等差数列となる。この数列を $\{b_k\}$ とおく。また、第 $n$ 群に含まれる数は $n$ 個である。第 $n$ 群を作る数列は、問1の結果より初項は

$a_{l,n} = n^2 - n + 1$ であり、公差は2の等差数列より、一般項 $\{b_k\}$ は、

$$b_k = (n^2 - n + 1) + 2(k-1)$$

となる。したがって、第 $n$ 群に含まれる数の和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n \{(n^2 - n + 1) + 2(k-1)\} \\ &= n(n^2 - n + 1) + n(n-1) \\ &= n^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad n^3$$

### 問3

第 $n$ 群の最初の数 $a_{l,n} = n^2 - n + 1$ と251を比較すればよく、 $n^2 - n + 1 \leq 251$ を満たす最大の整数 $n$ を求めればよい。 $n=16$ のとき $n^2 - n + 1 = 241$ となり、 $n=17$ のとき $n^2 - n + 1 = 273$ となるから、251は第16群である。したがって、数列 $\{b_k\}$ を考えると、

$$\begin{aligned} 251 &= 241 + 2(m-1) \\ \therefore m &= 6 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} n &= 16 - (6-1) \\ &= 11 \end{aligned}$$

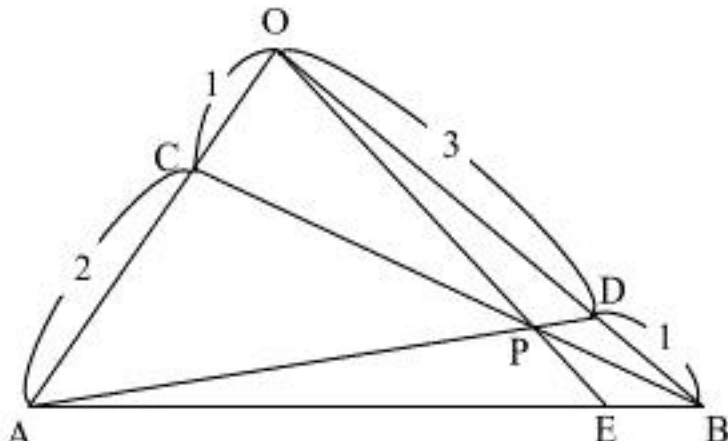
となって $a_{6,11} = 251$ となるから、 $m=6$ 、 $n=11$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{第16群, } m=6, n=11$$

# 第3問

## 問1

三角形 OAB を図示すると以下のようになる。



OD:DB=3:1であるから、

$$\overrightarrow{OD}=\frac{3}{4}\vec{b}$$

となる。点 P は線分 AD を  $t:1-t$  に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD} \\ &= (1-t)\vec{a}+\frac{3}{4}t\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+\frac{3}{4}t\vec{b}$$

## 問2

メネラウスの定理より、

$$\begin{aligned}\frac{OC}{CA}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DE}{EO} &=1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1-t}\cdot\frac{1}{4} &=1 \\ \therefore t &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

となる。これを問1の結果に代入すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \left(1-\frac{8}{9}\right)\vec{a}+\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\vec{b} \\ &= \frac{1}{9}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OP}=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

## 問3

点 P は線分 OE 上の点であるから、実数  $k$  を用いて

$$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OP}$$

と表せる。したがって、 $\overrightarrow{OE}$  について、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= k\left(\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{9}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}\end{aligned}$$

となる。点 E は線分 AB 上の点であり、 $\vec{a}, \vec{b}$  の係数の和は1であるから、

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}k+\frac{2}{3}k &=1 \\ \therefore k &= \frac{9}{7}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{OE}$  は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{7}\vec{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{7}\vec{b} \\ &= \frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。以上より、AE:EB=6:1となる。

$$\text{(答)} \quad \text{AE:EB}=6:1$$

## 問4

$\angle\text{AOB}=90^\circ$ であるから、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \text{①}$$

が成立する。また、 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$ であるから、

$$\left(\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \text{②}$$

が得られる。①式を用いて②式を整理すると、

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}\right)\cdot(\vec{b}-\vec{a}) &=0 \\ \Leftrightarrow \frac{6}{7}|\vec{b}|^2-\frac{1}{7}|\vec{a}|^2 &=0 \\ \therefore |\vec{a}| &= \sqrt{6}|\vec{b}|\end{aligned}$$

となる。これを用いてABの長さを考えると、

$$\begin{aligned}|\vec{b}-\vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2 \\ &= 7|\vec{b}|^2\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\text{AB} &= |\vec{b}-\vec{a}| \\ &= \sqrt{7}|\vec{b}|\end{aligned}$$

となる。以上より、OA:OB:ABは、

$$\begin{aligned}\text{OA:OB:AB} &= |\vec{a}|:|\vec{b}|:|\vec{b}-\vec{a}| \\ &= \sqrt{6}|\vec{b}|:|\vec{b}|:\sqrt{7}|\vec{b}| \\ &= \sqrt{6}:1:\sqrt{7}\end{aligned}$$

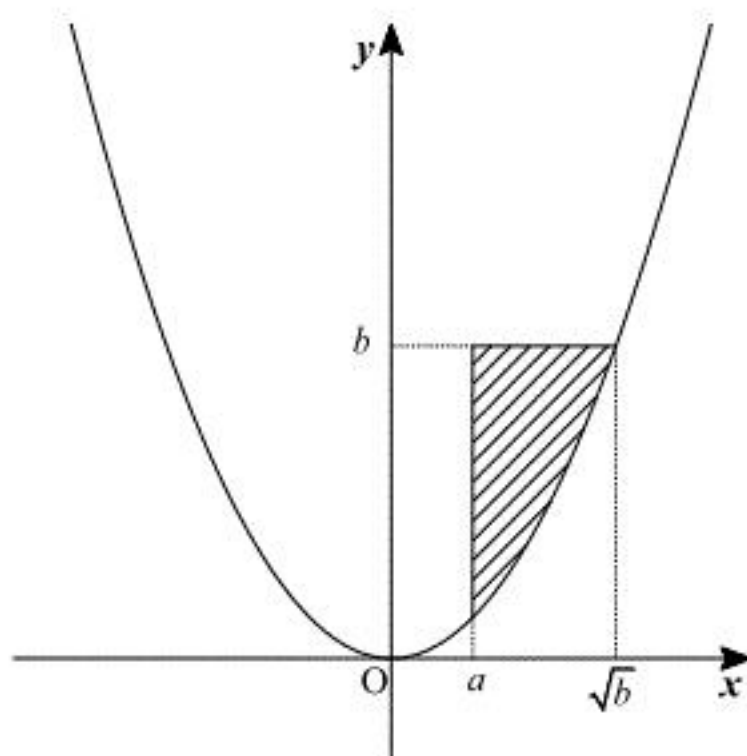
となる。

$$\text{(答)} \quad \text{OA:OB:AB}=\sqrt{6}:1:\sqrt{7}$$

## 第4問

### 問1

領域  $E(a, b)$  を図示すると以下ようになる。



したがって面積  $S$  の値は、

$$\begin{aligned} S &= (\sqrt{b} - a)b - \int_a^{\sqrt{b}} x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}a^3 - ab \end{aligned}$$

となる。

(答)  $S = \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} - ab + \frac{a^3}{3}$

### 問2

点  $(2t-1, t^2)$  が領域  $D$  内を動くから、

$$\begin{aligned} t^2 &\geq (2t-1)^2 \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 4t + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (3t-1)(t-1) &\leq 0 \\ \therefore \frac{1}{3} &\leq t \leq 1 \end{aligned}$$

が得られる。

(答)  $\frac{1}{3} \leq t \leq 1$

### 問3

問1より、 $S = \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}a^3 - ab$  に代入すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3}(t^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(2t-1)^3 - (2t-1) \cdot t^2 \\ &= \frac{4}{3}t^3 - 3t^2 + 2t - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$f(t) = \frac{4}{3}t^3 - 3t^2 + 2t - \frac{1}{3}$$

となる。

(答)  $f(t) = \frac{4}{3}t^3 - 3t^2 + 2t - \frac{1}{3}$

### 問4

$f(t)$  を  $t$  について微分すると、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t^2 - 6t + 2 \\ &= 2(2t-1)(t-1) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $\frac{1}{3} \leq t \leq 1$  における増減表は以下ようになる。

|         |               |     |                |     |   |
|---------|---------------|-----|----------------|-----|---|
| $t$     | $\frac{1}{3}$ | ... | $\frac{1}{2}$  | ... | 1 |
| $f'(t)$ |               | +   | 0              | -   | 0 |
| $f(t)$  |               | ↗   | $\frac{1}{12}$ | ↘   |   |

以上より、 $f(t)$  の最大値は  $\frac{1}{12}$  となる。

(答)  $\frac{1}{12}$

第 5 問

問 1

数学的帰納法を用いて、 $f_n(x)=a_n\sin\alpha x+b_n\cos\alpha x$  の形で表されることを示す。

[1]  $n=1$  のとき

$$f_1(x)=a_1\sin\alpha x+b_1\cos\alpha x$$

より、成り立つ。

[2]  $n=k(k\geq 1)$  のとき

$f_k(x)$  は実数  $a_k, b_k$  を用いて、 $f_k(x)=a_k\sin\alpha x+b_k\cos\alpha x$  と表せると仮定する。 $n=k+1$

のときを考える。 $f_k'(x)$  を計算すると、

$$f_k'(x)=\alpha(a_k\cos\alpha x-b_k\sin\alpha x)$$

となる。したがって、 $f_{k+1}(x)$  は、

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \beta\left(f_{k+1}(x)+f_{k+1}'(x)\right) \\ &= \beta(a_k-\alpha b_k)\sin\alpha x+\beta(b_k+\alpha a_k)\cos\alpha x \end{aligned}$$

となり、示された。

以上[1], [2]より、数学的帰納法から証明された。

(証明終)

問 2

問 1 の結果より、

$$\begin{cases} a_{k+1}=\beta(a_k-\alpha b_k) \\ b_{k+1}=\beta(b_k+\alpha a_k) \end{cases}$$

が得られる。この連立方程式を変形すると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{k+1}=\beta(a_k-\alpha b_k) \\ b_{k+1}=\beta(b_k+\alpha a_k) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a_{k+1}=\beta a_k-\alpha\beta b_k \\ b_{k+1}=\alpha\beta a_k+\beta b_k \end{cases} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$$

が得られる。したがって、行列  $P$  は、

$$P=\begin{pmatrix} \beta & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta \end{pmatrix}$$

となる。

(答)  $P=\begin{pmatrix} \beta & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta \end{pmatrix}$

問 3

与えられた値を代入すると、行列  $P$  は

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。これは、回転を表す行列であり、

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となっている。したがって、 $a_{99}, b_{99}$  の値は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{99} \\ b_{99} \end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix} a_{98} \\ b_{98} \end{pmatrix} \\ &= P^2\begin{pmatrix} a_{97} \\ b_{97} \end{pmatrix} \\ &= P^{98}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{98}{3}\pi & -\sin\frac{98}{3}\pi \\ \sin\frac{98}{3}\pi & \cos\frac{98}{3}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。以上より、 $f_{99}(x)$  は、

$$f_{99}(x)=-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x-\cos\sqrt{3}x$$

となる。

(答)  $f_{99}(x)=-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x-\cos\sqrt{3}x$

# 第6問

問1

$x$  軸と交わる点を考えるから、 $y=0$  を代入すればよく、

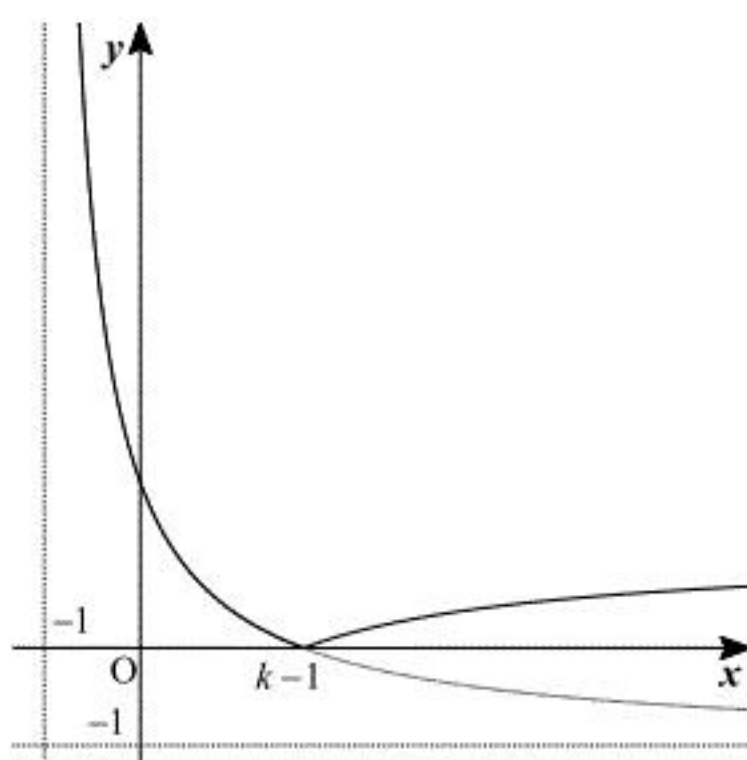
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{k}{x+1} - 1 \\ \Leftrightarrow x+1 &= k \\ \therefore x &= k-1 \end{aligned}$$

が得られる。

(答)  $x=k-1$

問2

$y=|f(x)|$  のグラフは以下の実線のようになる。



以下、 $k$  の値によって場合分けして考える。

[1]  $-1 < k-1 < 0$  すなわち  $0 < k < 1$  のとき

求める  $S$  の値は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left( 1 - \frac{k}{x+1} \right) dx \\ &= \left[ x - k \log(x+1) \right]_0^2 \\ &= 2 - k \log 3 \end{aligned}$$

となる。

[2]  $0 \leq k-1 \leq 2$  すなわち  $1 \leq k \leq 3$  のとき

求める  $S$  の値は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{k-1} \left( \frac{k}{x+1} - 1 \right) dx + \int_{k-1}^2 \left( 1 - \frac{k}{x+1} \right) dx \\ &= \left[ k \log(x+1) - x \right]_0^{k-1} + \left[ x - k \log(x+1) \right]_{k-1}^2 \\ &= 2k \log k - k \log 3 - 2k + 4 \end{aligned}$$

となる。

[3]  $2 < k-1$  すなわち  $3 < k$  のとき

求める  $S$  の値は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left( \frac{k}{x+1} - 1 \right) dx \\ &= \left[ k \log(x+1) - x \right]_0^2 \\ &= k \log 3 - 2 \end{aligned}$$

となる。

以上より、求める  $S$  の値は、

$$S = \begin{cases} 2 - k \log 3 & (0 < k < 1) \\ 2k \log k - k \log 3 - 2k + 4 & (1 \leq k \leq 3) \\ k \log 3 - 2 & (3 < k) \end{cases}$$

となる。

$$(答) \quad S = \begin{cases} 2 - k \log 3 & (0 < k < 1) \\ 2k \log k - k \log 3 - 2k + 4 & (1 \leq k \leq 3) \\ k \log 3 - 2 & (3 < k) \end{cases}$$

問3

$0 < k < 1$  の範囲では、 $S$  は傾きが負である  $k$  の一次関数であるから単調減少する。また、 $3 < k$  の範囲では、 $S$  は傾きが正である  $k$  の一次関数であるから単調増加する。以下、 $1 \leq k \leq 3$  の範囲を考える。ここで  $g(k) = 2k \log k - k \log 3 - 2k + 4$  において、 $g(k)$  を  $k$  について微分すると、

$$\begin{aligned} g'(k) &= 2 \log k + 2k \cdot \frac{1}{k} - \log 3 - 2 \\ &= \log \frac{k^2}{3} \end{aligned}$$

が得られる。したがって、増減表は以下のようになる。

|         |   |            |               |            |   |
|---------|---|------------|---------------|------------|---|
| $k$     | 1 | ...        | $\sqrt{3}$    | ...        | 3 |
| $g'(k)$ |   | -          | 0             | +          |   |
| $g(k)$  |   | $\searrow$ | $4-2\sqrt{3}$ | $\nearrow$ |   |

したがって、 $S$  を最小とする  $k$  は、 $k = \sqrt{3}$  であり、そのときの  $S$  の値は  $S = 4 - 2\sqrt{3}$  となる。

(答)  $k = \sqrt{3}$  ,  $S = 4 - 2\sqrt{3}$