

第 1 問

問 1

取り出す 3 個の玉の数字の組み合わせは

$$(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 0, -1), (0, 1, 2), (0, 1, -1), (0, 2, -1), (1, 2, -1)$$

の 7 通りであるから、それぞれ m を計算すると

$$m = 1, 2, -1, 3, 0, 1, 2$$

となる。よって m のとりうる値は、

$$m = -1, 0, 1, 2, 3$$

である。

(答) $m = -1, 0, 1, 2, 3$

問 2

問 1 で考えた玉の組み合わせについて、袋の中に残っている玉の数字はそれぞれ、

$$(2, -1), (1, -1), (1, 2), (0, -1), (0, 2), (0, 1), (0, 0)$$

であるから、それぞれ n を計算すると

$$n = -2, -1, 2, 0, 0, 0, 0$$

となる。よって m と n のとり得る組み合わせは

$$(m, n) = (1, -2), (2, -1), (-1, 2), (3, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)$$

である。

(答) $(m, n) = (1, -2), (2, -1), (-1, 2), (3, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)$

問 3

2 つの 0 と書かれた玉を区別すると、玉の取り出し方は ${}_5C_2 = 10$ 通りでこれらは同様に確からしい。以下、取り出す 3 個の玉の数字に含まれる 0 の個数で場合分けをする。

[1] 0 が 0 個のとき

玉の取り出し方はそれぞれの組み合わせにつき 1 通りであるから、起こる確率はそれぞれ

$\frac{1}{10}$ である。

[2] 0 が 1 個のとき

0 の選び方が 2 通り考えられるから、玉の取り出し方はそれぞれの組み合わせにつき

${}_2C_1 = 2$ 通りとなる。よって、起こる確率はそれぞれ $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ である。

[3] 0 が 2 個のとき

[1] と同様に取り出し方はそれぞれ 1 通りであるから、起こる確率はそれぞれ $\frac{1}{10}$ である。

以上 [1], [2], [3], および問 1・問 2 の結果より、求める確率は

$$\begin{cases} \frac{1}{10} & ((m, n) = (2, 0), (1, -2), (2, -1), (-1, 2)) \\ \frac{1}{5} & ((m, n) = (3, 0), (0, 0), (1, 0)) \end{cases}$$

である。

$$(答) \begin{cases} \frac{1}{10} & ((m, n) = (2, 0), (1, -2), (2, -1), (-1, 2)) \\ \frac{1}{5} & ((m, n) = (3, 0), (0, 0), (1, 0)) \end{cases}$$

問 4

x の方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とすると、不等式 $f(x) > 0$ がすべての実数 x について成り立つための条件は $D < 0$ である。ここで $D = m^2 - 4n$ より、これを満たす m と n の組み合わせ

は $(m, n) = (-1, 2)$ のみである。よって問 3 の結果より、求める確率は $\frac{1}{10}$ である。

(答) $\frac{1}{10}$

問 5

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - mx + n \\ &= \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + n \end{aligned}$$

と変形できることから、関数 $f(x)$ は軸の方程式が $x = \frac{m}{2}$ の放物線を表す。したがって、方程式

$f(x) = 0$ が異なる実数解 α, β をもち、かつ $\alpha < 2, \beta < 2$ を満たすための条件は

$$\begin{cases} D > 0 \\ \frac{m}{2} < 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4n > 0 \\ m < 4 \\ n - 2m + 4 > 0 \end{cases}$$

である。これを満たす m と n の組み合わせは $(m, n) = (1, 0)$ のみであるから、問 3 の結果より

求める確率は $\frac{1}{5}$ である。

(答) $\frac{1}{5}$

第 2 問

問 1

点 P は辺 BC を 1:1 に、点 Q は辺 AB を 1:2 にそれぞれ内分することから、

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}, \overrightarrow{OQ}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3} - \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

(答) $\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

問 2

$\overrightarrow{PQ}$ と $\vec{a}+\vec{b}$ は平行かつ向きが同じだから、正の定数 t を用いて $\overrightarrow{PQ}=t(\vec{a}+\vec{b})$ と表せる。よって

$|\overrightarrow{PQ}|=t|\vec{a}+\vec{b}|$ である。一方、問題文の条件 $|\overrightarrow{PQ}|:|\vec{a}+\vec{b}|=s:1$ より $|\overrightarrow{PQ}|=s|\vec{a}+\vec{b}|$ であるから、

$t=s$ である。したがって、 $\overrightarrow{PQ}=s(\vec{a}+\vec{b})$ であるから、

$$s(\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、点 O は $\triangle ABC$ の外心であるから、 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ である。このことに注意し、

①の両辺と $\vec{a}$ との内積を計算すると、

$$\begin{aligned}s(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a} &= \left(\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\vec{a} \\ \Leftrightarrow s|\vec{a}|^2+s\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{2}{3}|\vec{a}|^2-\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{c} &= \frac{4}{3}-2s-\left(2s+\frac{1}{3}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

となる。同様に、①の両辺と $\vec{b}$ との内積を計算すると、

$$\begin{aligned}s(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b} &= \left(\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\vec{b} \\ \Leftrightarrow s\vec{a}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2 &= \frac{2}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{6}|\vec{b}|^2-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} \\ \Leftrightarrow \vec{b}\cdot\vec{c} &= -\frac{1}{3}-2s+\left(\frac{4}{3}-2s\right)\vec{a}\cdot\vec{b}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{4}{3}-2s-\left(2s+\frac{1}{3}\right)\vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{3}-2s+\left(\frac{4}{3}-2s\right)\vec{a}\cdot\vec{b}$

問 3

$s=\frac{1}{6}$ より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(\vec{a}+\vec{b}) &= \frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c} \\ \Leftrightarrow \vec{c} &= \vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}|\vec{c}|^2 &= \left|\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right|^2 \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2-\frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{4}{9}(\because |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1) \\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{3}$

第3問

問1

$p_n = b_{n+1} - 2b_n$ とおくと, $b_{n+2} = 5b_{n+1} - 6b_n$ より

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= b_{n+2} - 2b_{n+1} \\ &= (5b_{n+1} - 6b_n) - 2b_{n+1} \\ &= 3b_{n+1} - 6b_n \\ &= 3(b_{n+1} - 2b_n) \\ &= 3p_n \end{aligned}$$

となる。よって, 数列 $\{p_n\}$ は公比3の等比数列で, その初項は

$$p_1 = b_2 - 2b_1 = 2$$

であるから, 一般項は $p_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ となる。

(答) $p_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

問2

$q_n = b_{n+1} - 3b_n$ とおくと, 問1と同様にして

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= b_{n+2} - 3b_{n+1} \\ &= (5b_{n+1} - 6b_n) - 3b_{n+1} \\ &= 2b_{n+1} - 6b_n \\ &= 2(b_{n+1} - 3b_n) \\ &= 2q_n \end{aligned}$$

となる。よって, 数列 $\{q_n\}$ は公比2の等比数列で, その初項は

$$q_1 = b_2 - 3b_1 = 1$$

であるから, 一般項は $q_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ となる。

(答) $q_n = 2^{n-1}$

問3

問1および問2の結果より

$$\begin{aligned} b_{n+1} - 2b_n &= 2 \cdot 3^{n-1} \\ b_{n+1} - 3b_n &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

であるから, 辺々引いて

$$b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$$

を得る。

(答) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

問4

問3の結果より

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= b_n + \frac{1}{n(n+1)} + n \\ &= 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + n \end{aligned}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

となるから, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 2 \cdot 3^{k-1} - 2^{k-1} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + k \right\} \\ &= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} - \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} n(n-1) \\ &= 3^{n-1} - 2^{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} n(n-1) + 2 \end{aligned}$$

となり, これは $n=1$ のときも成立する。

(答) $a_n = 3^{n-1} - 2^{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} n(n-1) + 2$

第4問

問1

曲線 $C: y = x^2$ とする。 C 上の点 (t, t^2) における C の接線の方程式は、 $y' = 2x$ より

$$\begin{aligned} y - t^2 &= 2t(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

である。これが点 $P(u, u-1)$ を通ることから、

$$\begin{aligned} u - 1 &= 2tu - t^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 2ut + u - 1 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。これを t に関する2次方程式とみて、判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= u^2 - (u-1) \\ &= u^2 - u + 1 \\ &= \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

であるから、すべての u に対し $\frac{D}{4} > 0$ である。よって、この方程式は異なる2実数解をもつ。

2次関数においては接線と接点が一対一に対応することから、これは点 P を通る C の接線がちょうど2本存在することを示す。

(証明終)

問2

条件より、 α, β は t の方程式 $t^2 - 2ut + u - 1 = 0$ の異なる実数解である。この方程式の解は

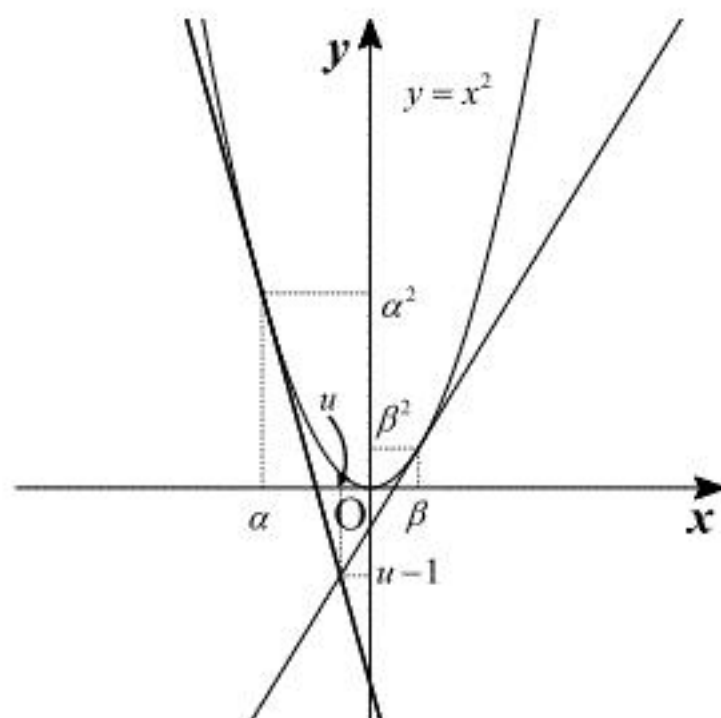
$$t = u \pm \sqrt{u^2 - u + 1}$$

であるから、 $\alpha < \beta$ に注意すると、 $\alpha = u - \sqrt{u^2 - u + 1}$ 、 $\beta = u + \sqrt{u^2 - u + 1}$ である。

$$(\text{答}) \quad \alpha = u - \sqrt{u^2 - u + 1}, \quad \beta = u + \sqrt{u^2 - u + 1}$$

問3

点 P を通る2本の接線の方程式は $y = 2\alpha x - \alpha^2$ 、 $y = 2\beta x - \beta^2$ であるから、これらと C を図示すると、以下のようになる。



よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^u \{x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\} dx + \int_u^{\beta} \{x^2 - (2\beta x - \beta^2)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^u (x - \alpha)^2 dx + \int_u^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x - \alpha)^3 \right]_{\alpha}^u + \left[\frac{1}{3}(x - \beta)^3 \right]_u^{\beta} \\ &= \frac{1}{3}(u - \alpha)^3 + \frac{1}{3}(\beta - u)^3 \end{aligned}$$

となる。ここで、問2の結果より $u - \alpha = \beta - u = \sqrt{u^2 - u + 1}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3}(u^2 - u + u)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}(u^2 - u + 1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3}(u^2 - u + 1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{2}{3}(u^2 - u + 1)^{\frac{3}{2}}$$

問4

問3の結果から、 $u^2 - u + 1$ が最小のときに S も最小となる。ここで

$$u^2 - u + 1 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

と変形できることから、 S は $u = \frac{1}{2}$ のとき最小となり、このとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \left(u = \frac{1}{2}\right)$$

第5問

問1

$f'(x) = xe^x$ の両辺を x について積分すると、 C を積分定数として

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (xe^x) dx \\ &= \int \left\{ x(e^x)' \right\} dx \\ &= xe^x - \int x'e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \end{aligned}$$

となる。これに $x=1$ を代入すると、 $f(1)=C$ となる。一方、与えられた条件より $f(1)=0$ であるから、 $C=0$ である。以上より $f(x)=(x-1)e^x$ である。

(答) $f(x)=(x-1)e^x$

問2

$\int_0^1 g(t) dt$ は実数の定数であるから、 $\frac{1}{e-1} \int_0^1 g(t) dt = a$ とおくと、与えられた等式は

$$g(x) = f(x) + a(2-x)e^x$$

となる。これを $\frac{1}{e-1} \int_0^1 g(t) dt = a$ に代入すると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{e-1} \int_0^1 \{ f(x) + a(2-x)e^x \} dx = a \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{e-1} \int_0^1 \{ (x-1)e^x + a(2-x)e^x \} dx = a \\ \Leftrightarrow &\int_0^1 \{ (1-a)xe^x + (2a-1)e^x \} dx = (e-1)a \\ \Leftrightarrow &\int_0^1 \{ (1-a)f'(x) + (2a-1)e^x \} dx = (e-1)a \\ \Leftrightarrow &\left[(1-a)f(x) + (2a-1)e^x \right]_0^1 = (e-1)a \\ \Leftrightarrow &(1-a)\{f(1)-f(0)\} + (2a-1)(e-1) = (e-1)a \\ \Leftrightarrow &a-1+(a-1)(e-1) = 0 \\ \Leftrightarrow &e(a-1) = 0 \\ \Leftrightarrow &a = 1 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)e^x + (2-x)e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

となる。

(答) $g(x) = e^x$

問3

$e^0 \neq k \cdot 0$ であるから、方程式 $e^x = kx$ は $x=0$ を解にもたない。よって $x \neq 0$ と考えてよいことから、方程式 $e^x = kx$ の代わりに方程式 $\frac{e^x}{x} = k$ について考えればよい。ここで、

$$h(x) = \frac{e^x}{x} \quad (x \neq 0)$$

とおくと、方程式の実数解は曲線 $y = h(x)$ と直線 $y = k$ の交点の x 座標に等しい。このとき、

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{xe^x - e^x}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)e^x}{x^2} \end{aligned}$$

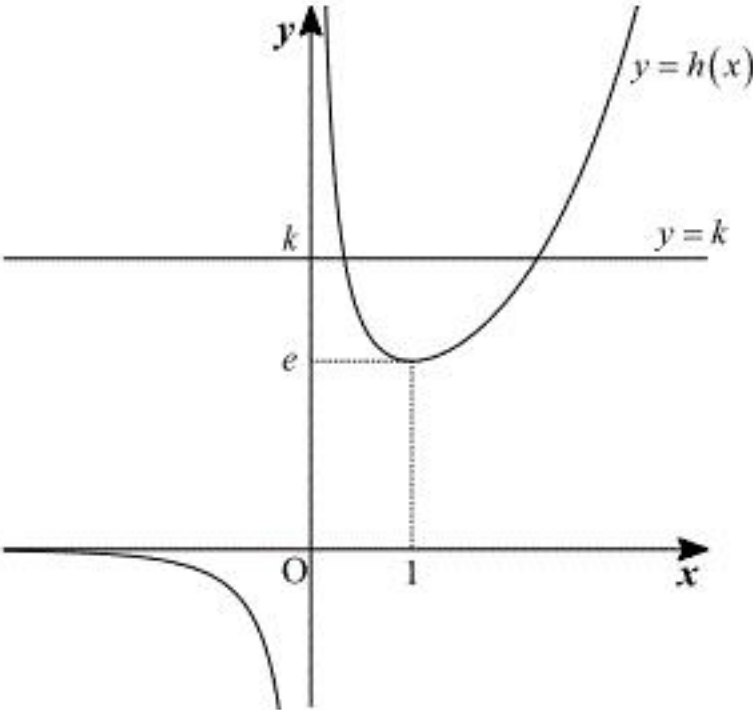
であるから、 $h(x)$ の増減は以下ようになる。

x	...	(0)	...	1	...
$h'(x)$	-		-	0	+
$h(x)$	$\searrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

また、 $h(x) = \frac{e^x}{x}$ より

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} h(x) &= +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} h(x) = -\infty \end{aligned}$$

であるから、 $y = h(x)$ のグラフは下図のようになる。



上図より、曲線 $y = h(x)$ と直線 $y = k$ の交点、すなわち $h(x) = k$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} k < 0, k = e \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 \leq k < e \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ k > e \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

である。

(答) $\begin{cases} k < 0, k = e \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ 0 \leq k < e \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ k > e \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{cases}$

第6問

問1

$f(x)=0$ とすると,

$$f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\pi-x)\sin mx=0$$

$$\Leftrightarrow \pi-x=0 \text{ または } \sin mx=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pi \text{ または } x=0, \frac{\pi}{m}, \frac{2}{m}\pi, \dots, \frac{m-1}{m}\pi, \pi$$

$$\Leftrightarrow x=0, \frac{\pi}{m}, \frac{2}{m}\pi, \dots, \frac{m-1}{m}\pi, \pi$$

より, 条件を満たす x の個数は $m+1$ 個であるから, $N=m+1$ である。また, これらを小さい

順に $x_1, x_2, \dots, x_N$ とすると, $x_k = \frac{k-1}{m}\pi (k=1, 2, \dots, m+1)$ である。

$$(\text{答}) \quad N=m+1, x_k = \frac{k-1}{m}\pi (k=1, 2, \dots, m+1)$$

問2

$x_k \leq x \leq x_{k+1}$ において, 常に $f(x) \geq 0$ または常に $f(x) \leq 0$ であるから

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)| dx \\ &= \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right| \end{aligned}$$

となる。ここで, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$ を計算すると

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\pi-x) \sin mx dx \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\pi-x) \left(-\frac{1}{m} \cos mx \right)' dx \\ &= \left[-\frac{1}{m} (\pi-x) \cos mx \right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{1}{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\pi-x)' \cos mx dx \\ &= \frac{1}{m} \{ (\pi-x_k) \cos mx_k - (\pi-x_{k+1}) \cos mx_{k+1} \} - \frac{1}{m} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos mx dx \\ &= \frac{1}{m} \left\{ \left(\pi - \frac{k-1}{m}\pi \right) \cos(k-1)\pi - \left(\pi - \frac{k}{m}\pi \right) \cos k\pi \right\} - \frac{1}{m} \left[\frac{1}{m} \sin mx \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\ &= \frac{\pi}{m^2} \{ (m-k+1)(-1)^{k-1} - (m-k)(-1)^k \} - \frac{1}{m^2} (\sin mx_{k+1} - \sin mx_k) \\ &= \frac{(-1)^{k-1} (2m-2k+1)}{m^2} \pi \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} S_k &= \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{k-1} (2m-2k+1)}{m^2} \pi \right| \\ &= \frac{2m-2k+1}{m^2} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_k = \frac{2m-2k+1}{m^2} \pi$$

問3

問2の結果より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m S_k &= \sum_{k=1}^m \frac{2m-2k+1}{m^2} \pi \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{2m+1}{m^2} \pi - \sum_{k=1}^m \frac{2k}{m^2} \pi \\ &= \frac{2m+1}{m} \pi - \frac{2}{m^2} \cdot \frac{1}{2} m(m+1) \pi \\ &= \frac{(2m+1) - (m+1)}{m} \pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \pi$$