

第1問

問1

正の整数 (i, j) の組として, $(1, 2), (1, 3), (1, 4)$ が考えられる。したがって,

$$f(X) = 3$$

となる。

(答) 3

問2

X の列は,

$${}_4C_2 = 6 \text{ 通り}$$

存在する。 $X = (0, 0, 1, 1)$ のとき, 題意を満たす (i, j) の組は存在しないため,

$$f(X) = 0$$

である。 $X = (0, 1, 0, 1)$ のとき, $(i, j) = (2, 3)$ が題意を満たすことから,

$$f(X) = 1$$

である。 $X = (1, 0, 0, 1)$ のとき, $(i, j) = (1, 2), (1, 3)$ が題意を満たすことから,

$$f(X) = 2$$

である。 $X = (0, 1, 1, 0)$ のとき, $(i, j) = (2, 4), (3, 4)$ が題意を満たすことから,

$$f(X) = 2$$

である。 $X = (1, 0, 1, 0)$ のとき, $(i, j) = (1, 2), (1, 4), (3, 4)$ が題意を満たすことから,

$$f(X) = 3$$

である。 $X = (1, 1, 0, 0)$ のとき, $(i, j) = (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)$ が題意を満たすことから,

$$f(X) = 4$$

である。

(答) $X = (0, 0, 1, 1)$ のとき $f(X) = 0$

$X = (0, 1, 0, 1)$ のとき $f(X) = 1$

$X = (1, 0, 0, 1)$ のとき $f(X) = 2$

$X = (0, 1, 1, 0)$ のとき $f(X) = 2$

$X = (1, 0, 1, 0)$ のとき $f(X) = 3$

$X = (1, 1, 0, 0)$ のとき $f(X) = 4$

問3

列 X のうち, 数字が1のカードは q 枚, 数字が0のカードは p 枚であるから, 考えられる (i, j) の組の総数は最大でも pq 通りであり, ここから $f(X)$ がとりうる最大の値は pq であるとわかる。ここで,

$$X = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

と並べたとき, q 個すべての1について, p 個の0が右側に存在することから,

$$f(X) = pq$$

となるため, pq が $f(X)$ の最大値とわかる。

(答) pq

第2問

問1

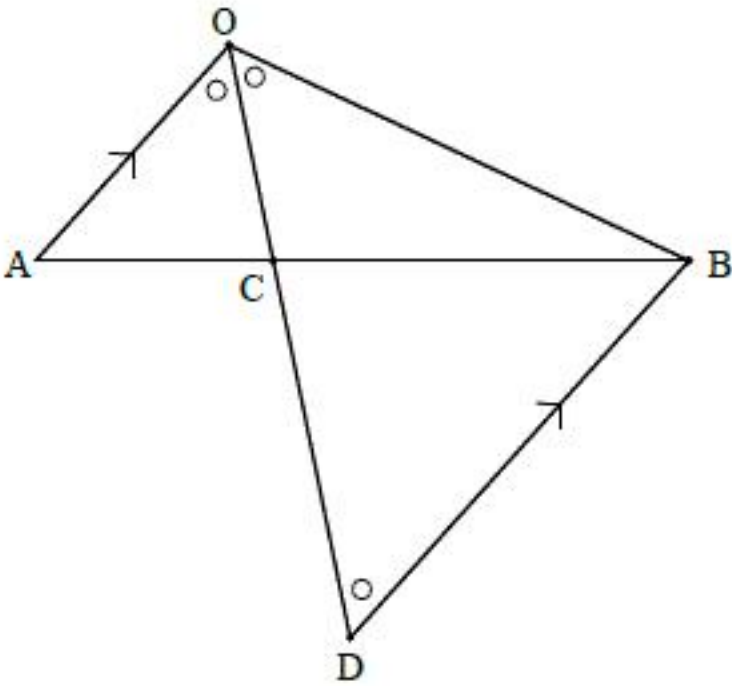
余弦定理より

$$\begin{aligned}\overline{OA} \cdot \overline{OB} &= OA \cdot OB \cos \theta \\ &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} \\ &= \frac{4^2 + 7^2 - 9^2}{2} \\ &= -8\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = -8$

問2



点Bを通り辺OAに平行な直線と、直線OCの交点を点Dとおく。このとき、OA//BDより

$$\begin{aligned}\angle BOC &= \angle AOD = \angle BDC \\ \therefore BO &= BD = 7\end{aligned}$$

となる。したがって、OA:BD=4:7であるから、

$$\overline{OD} = \overline{OB} + \frac{7}{4}\overline{OA}$$

となる。ここで、点Cは直線OD上にあるから、 $\overline{OC}$ と $\overline{OD} = \overline{OB} + \frac{7}{4}\overline{OA}$ は平行である。よって、

$$k = \frac{7}{4}$$

である。

(答) $k = \frac{7}{4}$

問3

点Cは直線AB上の点であるから、問2の結果を利用すると、

$$\begin{aligned}\overline{OD} &= \overline{OB} + \frac{7}{4}\overline{OA} = \frac{11}{4}\left(\frac{7}{11}\overline{OA} + \frac{4}{11}\overline{OB}\right) \\ \therefore \overline{OC} &= \frac{7}{11}\overline{OA} + \frac{4}{11}\overline{OB}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overline{OC} = \frac{7}{11}\overline{OA} + \frac{4}{11}\overline{OB}$

問4

問1、問3の結果より、

$$\begin{aligned}|\overline{OC}|^2 &= \left|\frac{7}{11}\overline{OA} + \frac{4}{11}\overline{OB}\right|^2 \\ &= \frac{1}{11^2}\left(49|\overline{OA}|^2 + 2 \cdot 7 \cdot 4 \overline{OA} \cdot \overline{OB} + 16|\overline{OB}|^2\right) \\ &= \frac{1}{11^2}\{49 \cdot 16 + 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot (-8) + 16 \cdot 49\} \\ &= \frac{16}{11^2}(49 - 28 + 49) \\ &= \frac{16 \cdot 70}{11^2} \\ \therefore |\overline{OC}| &= \frac{4\sqrt{70}}{11}\end{aligned}$$

となる。

(答) $|\overline{OC}| = \frac{4\sqrt{70}}{11}$

第3問

問1

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\&= \sum_{k=1}^n \{a + (k-1)d\} \\&= \sum_{k=1}^n \{(a-d) + kd\} \\&= (a-d)n + \frac{1}{2}n(n+1)d\end{aligned}$$

となる。よって、

$$S_7 = (a-d) \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot d = 7(a+3d)$$

$$S_{11} = (a-d) \cdot 11 + \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 \cdot d = 11(a+5d)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_7 = 7(a+3d), \quad S_{11} = 11(a+5d)$$

問2

$$\begin{aligned}T_{11} &= \sum_{k=1}^{11} (a_k)^2 \\&= \sum_{k=1}^{11} \{a + (k-1)d\}^2 \\&= \sum_{k=1}^{11} \{(a-d) + dk\}^2 \\&= \sum_{k=1}^{11} \{(a-d)^2 + 2d(a-d)k + d^2k^2\} \\&= (a-d)^2 \cdot 11 + 2(ad-d^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 + \frac{d^2}{6} \cdot 11 \cdot 12 \cdot 23 \\&= 11(a^2 + 10ad + 35d^2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad T_{11} = 11(a^2 + 10ad + 35d^2)$$

問3

問1の結果を用いると、

$$\begin{aligned}S_7 &= 0 \\&\Leftrightarrow 7(a+3d) = 0 \\&\Leftrightarrow a = -3d \quad \quad \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}\end{aligned}$$

となり、問2の結果も用いると、

$$\begin{aligned}(S_{11})^2 - T_{11} &= 440 \\&\Leftrightarrow \{11(a+5d)\}^2 - 11(a^2 + 10ad + 35d^2) = 440 \\&\Leftrightarrow 11(a^2 + 10ad + 25d^2) - (a^2 + 10ad + 35d^2) = 40 \\&\Leftrightarrow 10a^2 + 100ad + 240d^2 = 40 \\&\Leftrightarrow a^2 + 10ad + 24d^2 = 4\end{aligned}$$

となる。ここに①を代入すると、

$$\begin{aligned}3d^2 &= 4 \\&\Leftrightarrow d = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となり、再び①を用いると、

$$(a, d) = \left(2\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(-2\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \quad (\text{複号同順})$$

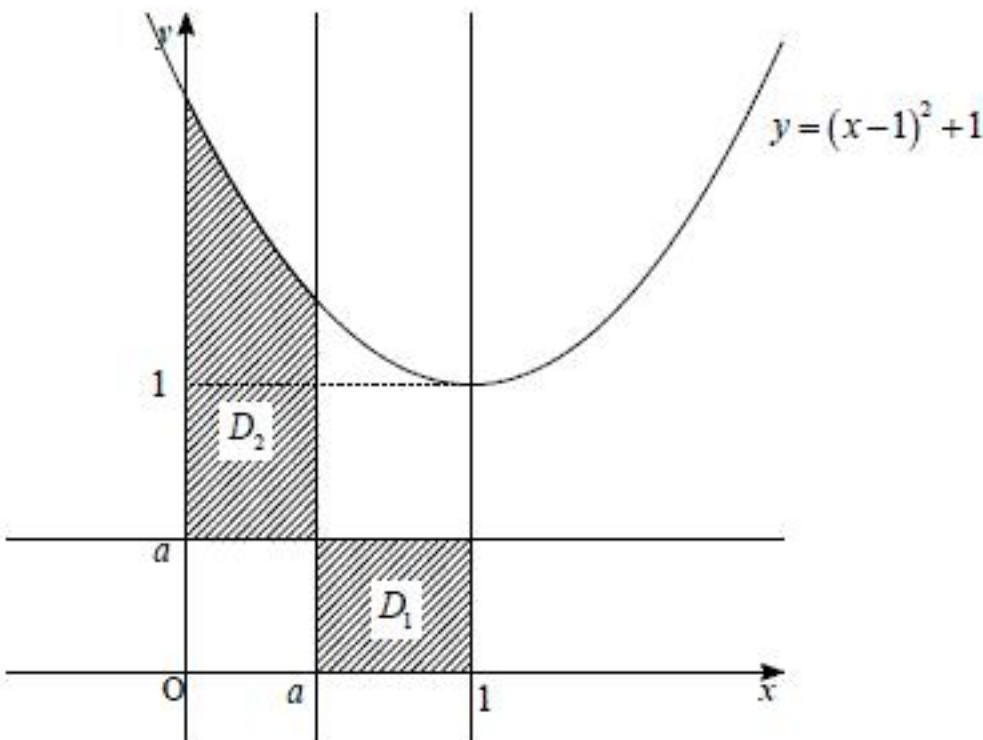
を得る。

$$(\text{答}) \quad (a, d) = \left(2\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \left(-2\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \quad (\text{複号同順})$$

第4問

問1

与えられた直線と放物線、および領域 D_1, D_2 を図示すると、次のようになる。



(答) 前図

問2

D_1 は底辺 $1-a$ 、高さ a の長方形であるから

$$S_1 = a(1-a)$$

となる。

(答) $S_1 = a(1-a)$

問3

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^a \{(x-1)^2 + 1 - a\} dx \\ &= \int_0^a (x^2 - 2x + 2 - a) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + (2-a)x \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 - a^2 + (2-a)a \\ &= \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 2a \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_2 = \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 2a$

問4

問2、問3の結果を用いると

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= a(1-a) + \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + 2a \\ &= \frac{1}{3}a^3 - 3a^2 + 3a \end{aligned}$$

となるから、 a で微分すると

$$\frac{dS}{da} = a^2 - 6a + 3 = \{a - (3 + \sqrt{6})\} \{a - (3 - \sqrt{6})\}$$

となる。よって、 $0 < a < 1$ における S の増減は下のようになる。

a	0	...	$3 - \sqrt{6}$	...	1
$\frac{dS}{da}$		+	0	-	
S		↗		↘	

増減表より、 S は $a = 3 - \sqrt{6}$ のときに最大値をとる。

(答) $a = 3 - \sqrt{6}$

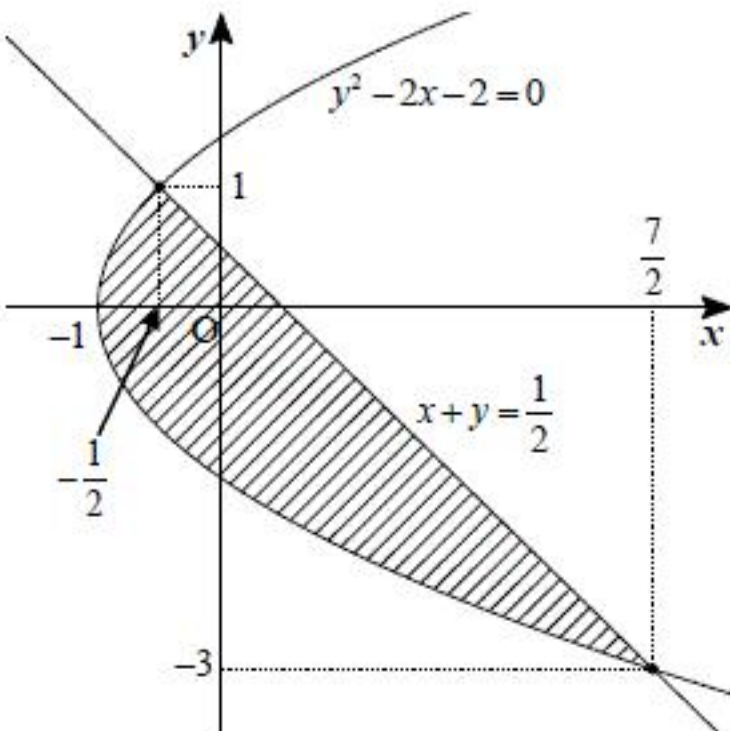
第5問

問1

与えられた曲線の方程式は、

$$y^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{2}-1$$

と変形できる。このとき、曲線、直線および領域 D の位置関係は次に示すとおりである。



D は上図の斜線部である。ただし境界はすべて含む。

(答) 前図斜線部 (境界はすべて含む)

問2

$$y^2-2x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}y^2-1$$

$$x+y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=-y+\frac{1}{2}$$

であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 \left\{ \left(\frac{1}{2}y^2 - 1 \right) - \left(-y + \frac{1}{2} \right) \right\} dy &= \frac{1}{2} \int_{-3}^1 (y-1)(y+3) dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+3)^3}{6} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

となる。

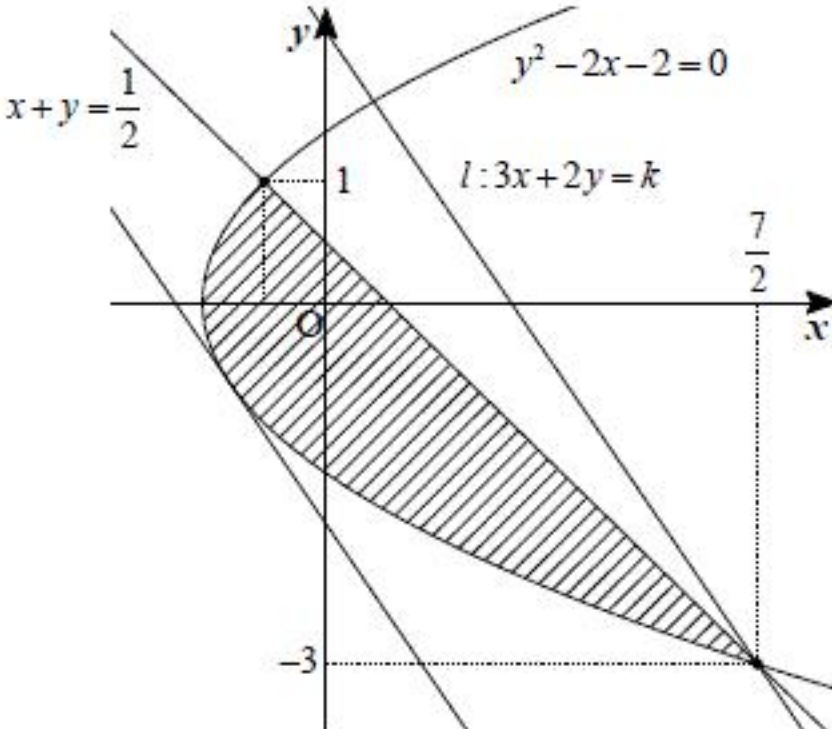
(答) $\frac{16}{3}$

問3

$3x+2y=k$ とおくと

$$3x+2y=k \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{k}{2}$$

と表せる。この方程式が表す直線を l とし、 l と D が共有点を持つときの l の y 切片 $\frac{k}{2}$ がとりうる範囲について考える。



直線 l の傾き $-\frac{3}{2}$ が -1 より小さいことから、直線 l が点 $\left(\frac{7}{2}, -3\right)$ を通るとき、 y 切片の値は最大となる。このとき、

$$k=3 \cdot \frac{7}{2} + 2 \cdot (-3) = \frac{9}{2}$$

となる。一方、直線 l と曲線が接する場合を考えると、次の2次方程式

$$y^2 - 2 \cdot \frac{k-2y}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y - (2k+6) = 0$$

が重解をもつことから、

$$\begin{aligned} 2^2 - 3 \cdot \{ -(2k+6) \} &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

となり、このとき $y = -\frac{2}{3}$ となる。ここで、 y のとりうる範囲は $-3 \leq y \leq 1$ であるから、求めた接点の y 座標はこれを満たす。図より、直線 l がこの点を通過する際に y 切片が最小となることが分かり、このとき $k = -\frac{11}{3}$ である。以上より、 $k = 3x+2y$ のとりうる範囲は

$$-\frac{11}{3} \leq 3x+2y \leq \frac{9}{2}$$

となる。

(答) $-\frac{11}{3} \leq 3x+2y \leq \frac{9}{2}$