

第1問

問1

直線 $y = mx + n$ と2次関数 $y = -x(x-1)$ のグラフが接するとき

$$\begin{aligned} mx + n &= -x(x-1) \\ \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + n &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

の判別式を D_1 とすると、 $D_1 = 0$ を満たす。よって

$$\begin{aligned} (m-1)^2 - 4n &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= \frac{1}{4}(m-1)^2 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad n = \frac{1}{4}(m-1)^2$$

問2

直線 $y = mx + n$ と2次関数 $y = -(x-a)(x-1)$ のグラフが接するとき

$$\begin{aligned} mx + n &= -(x-a)(x-1) \\ \Leftrightarrow x^2 + (m-1-a)x + n+a &= 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

の判別式を D_2 とすると、 $D_2 = 0$ を満たす。よって

$$\begin{aligned} (m-1-a)^2 - 4(n+a) &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)^2 - 2a(m-1) + a^2 - (m-1)^2 - 4a &= 0 \\ \Leftrightarrow a(a-2m-2) &= 0 \\ \therefore a &= 2m+2 \quad (\because a \neq 0) \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad a = 2m+2$$

問3

p_1 は2次方程式①の重解であるから

$$p_1 = -\frac{m-1}{2} = \frac{-m+1}{2}$$

である。また、 q_1 は2次方程式②の重解であるから

$$q_1 = -\frac{m-1-a}{2} = \frac{-m+1+(2m+2)}{2} = \frac{m+3}{2}$$

である。

$$\text{(答)} \quad p_1 = \frac{-m+1}{2}, q_1 = \frac{m+3}{2}$$

問4

点P, Qは直線 $y = mx + n$ 上に存在するから、 p_2, q_2 の値はそれぞれ

$$\begin{aligned} p_2 &= mp_1 + n = m \cdot \frac{-m+1}{2} + \frac{1}{4}(m-1)^2 = -\frac{1}{4}(m-1)(m+1) \\ q_2 &= mq_1 + n = m \cdot \frac{m+3}{2} + \frac{1}{4}(m-1)^2 = \frac{1}{4}(m+1)(3m+1) \end{aligned}$$

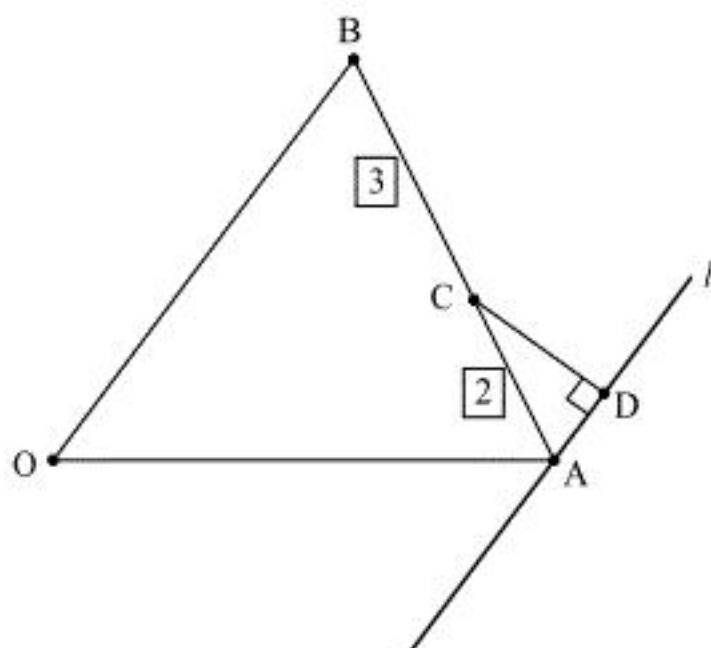
となる。よって、求める m の値の範囲は

$$\begin{aligned} p_2 &= -\frac{1}{4}(m-1)(m+1) > 0 \text{ かつ } q_2 = \frac{1}{4}(m+1)(3m+1) > 0 \\ \Leftrightarrow -1 < m < 1 \text{ かつ } m < -1, -\frac{1}{3} < m \\ \therefore -\frac{1}{3} < m < 1 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad -\frac{1}{3} < m < 1$$

第2問



問 1

Cは線分 AB を 2:3 に内分するから、

$$\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

である。

(答) $\vec{c} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

問 2

Dは直線 l 上にあるから、 k を実数として、 $\vec{d} = \vec{a} + k\vec{b}$ とおける。ここで、 $\overline{CD} \perp l \Leftrightarrow \overline{CD} \perp \overline{OB}$ であるから、

$$\begin{aligned} \overline{CD} \cdot \overline{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\vec{d} - \vec{c}) \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \vec{a} + k\vec{b} - \left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \right) \right\} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (5k - 2)|\vec{b}|^2 &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $|\vec{b}| \neq 0$ より

$$\begin{aligned} 5k - 2 &= -\frac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{2}{5} \left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \\ \therefore \vec{d} &= \vec{a} + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} \end{aligned}$$

である。

(答) $\vec{d} = \vec{a} + \frac{2}{5} \left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$

問 3

与えられた条件より、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= \vec{d} \\ &= \vec{a} + \frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{2} \right) \right\} \vec{b} \\ &= \vec{a} + \vec{b} \\ &= \overline{OA} + \overline{OB} \end{aligned}$$

となる。よって、四角形 OADB は平行四辺形である。

(証明終)

問 4

四角形 OADB が平行四辺形であるから、

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{OB} \text{ かつ } \vec{b} \neq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5} \left(1 - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} &= \vec{b} \text{ かつ } \vec{b} \neq 0 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= -\frac{3}{2} |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned} \left| \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} \right|^2 &= |\vec{b}|^2 + \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 + \frac{2}{3} \left(-\frac{3}{2} |\vec{b}|^2 \right) + \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{9}s^2 \end{aligned}$$

である。よって、 $|\vec{a}| = s > 0$ より、 $\left| \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} \right| = \frac{1}{3}s$ である。

(答) $\frac{1}{3}s$

第3問

問1

n を自然数として、初項が5、公差が4の等差数列の一般項を a_n とすると、

$$a_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1$$

となる。ここで、 $a_{44} = 177$ 、 $a_{45} = 181$ より、 A の要素は $\{a_n\}$ のうち $1 \leq n \leq 44$ を満たす44個である。よって、求める和は

$$\sum_{n=1}^{44} a_n = \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot (5 + 177) = 4004$$

である。

(答) 4004

問2

問1と同様に、初項が1、公差が6の等差数列の一般項を b_n とすると、

$$b_n = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$$

となる。ここで、 $b_{30} = 175$ 、 $b_{31} = 181$ より、 B の要素は $\{b_n\}$ のうち $1 \leq n \leq 30$ を満たす30個である。よって、求める和は

$$\sum_{n=1}^{30} b_n = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot (1 + 175) = 2640$$

である。

(答) 2640

問3

k, l を自然数として、 $a_k = b_l$ を満たす k, l の条件を求める。このとき、

$$4k + 1 = 6l - 5 \Leftrightarrow 2k = 3(l - 1)$$

となり、2と3が互いに素であることから、 p を自然数として、

$$\begin{cases} k = 3p \\ l - 1 = 2p \end{cases}$$

とおける。よって、数列 $\{a_k\}$ 、 $\{b_l\}$ の双方に現れる数列の一般項は、

$$a_{3p} = 12p + 1$$

と表される。ここで、 $a_{3 \cdot 14} = 169$ 、 $a_{3 \cdot 15} = 181$ より、 $A \cap B$ の要素は $\{a_{3p}\}$ のうち $1 \leq p \leq 14$ を満たす14個である。よって、求める和は

$$\sum_{p=1}^{14} (12p + 1) = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot (13 + 169) = 1274$$

となる。

(答) 1274

問4

求める和は、問1と問2で求めた和から問3で求めた和を引くことで求まる。すなわち、

$$4004 + 2640 - 1274 = 5370$$

である。

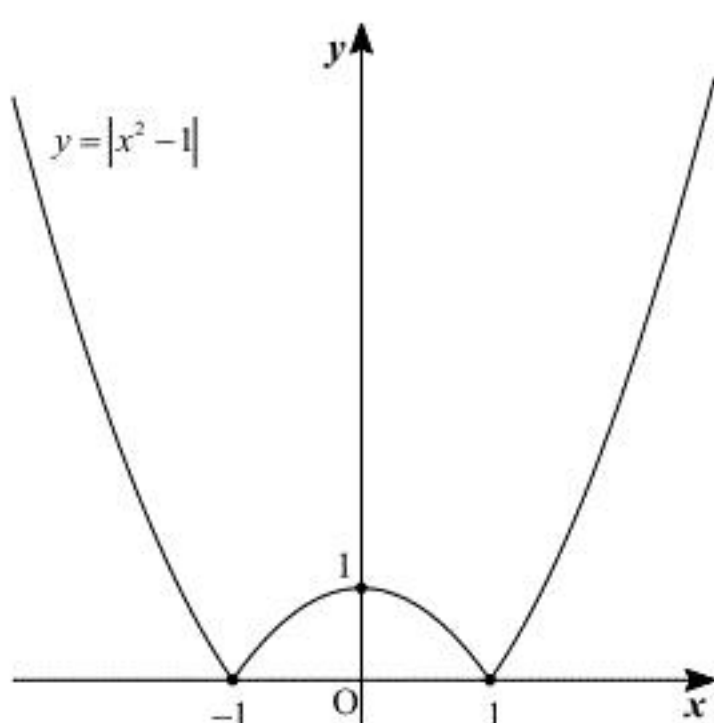
(答) 5370

第4問

問1

$$y=\left|x^2-1\right| \Leftrightarrow y=\left\{\begin{array}{l} x^2-1 \quad\left(x \leq-1,1 \leq x \text { のとき }\right) \\ -x^2+1 \quad(-1 \leq x \leq 1 \text { のとき }) \end{array}\right.$$

であるから、求めるグラフは下図のようになる。



(答) 前図

問2

$-1 \leq t \leq 0$ のとき、 $-1 \leq t < t+1 \leq 1$ であるから、

$$S(t)=\int_t^{t+1}\left(-x^2+1\right) d x=\left[-\frac{1}{3} x^3+x\right]_t^{t+1}=-t^2-t+\frac{2}{3}$$

である。

(答) $-t^2-t+\frac{2}{3}$

問3

$0 \leq t \leq 1$ のとき、 $t \leq 1 \leq t+1$ であるから、

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^1\left(-x^2+1\right) d x+\int_1^{t+1}\left(x^2-1\right) d x \\ &=\left[-\frac{1}{3} x^3+x\right]_t^1+\left[\frac{1}{3} x^3-x\right]_1^{t+1} \\ &=\frac{2}{3} t^3+t^2-t+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2}{3} t^3+t^2-t+\frac{2}{3}$

問4

$$S(t)=\left\{\begin{array}{ll} -t^2-t+\frac{2}{3} & (-1 \leq t \leq 0 \text { のとき }) \\ \frac{2}{3} t^3+t^2-t+\frac{2}{3} & (0 \leq t \leq 1 \text { のとき }) \end{array}\right.$$

である。

[1] $-1 \leq t \leq 0$ のとき

$$S(t)=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{12}$$

である。

[2] $0 \leq t \leq 1$ のとき

$S'(t)=2 t^2+2 t-1$ より、

$$S'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad(\because 0 \leq t \leq 1)$$

である。また、このとき $2 t^2=-2 t+1$ が成り立つことから、

$$\begin{aligned} S\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{2}{3} t^3+t^2-t+\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} t \cdot(-2 t+1)+t^2-t+\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} t^2-\frac{2}{3} t+\frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{6}(-2 t+1)-\frac{2}{3} t+\frac{2}{3} \\ &= -t+\frac{5}{6} \\ &= \frac{8-3 \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より、 $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{11}{12}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	$\frac{8-3 \sqrt{3}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

増減表より、 $S(t)$ は $t=1$ で最大値 $\frac{4}{3}$ を、 $t=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ で最小値 $\frac{8-3 \sqrt{3}}{6}$ をとる。

(答) 最大値： $\frac{4}{3}$ ，最小値： $\frac{8-3 \sqrt{3}}{6}$

第5問

問1

$y' = 4x^3 - 12x^2$ より、曲線 $y = x^4 - 4x^3$ 上の点 $(t, t^4 - 4t^3)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (4t^3 - 12t^2)(x - t) + t^4 - 4t^3 \\ &= (4t^3 - 12t^2)x - 3t^4 + 8t^3 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = (4t^3 - 12t^2)x - 3t^4 + 8t^3$

問2

問1で求めた接線が点 $(p, 0)$ を通るとき

$$0 = (4t^3 - 12t^2)p - 3t^4 + 8t^3$$

より、

$$t^2 \{ 3t^2 - 4(p+2)t + 12p \} = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。方程式①は p の値にかかわらず $t = 0$ を解に持ち、 $p > 0$ であるから

$$3t^2 - 4(p+2)t + 12p = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

は、 $t = 0$ 以外の解をもつ。また、方程式②の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \{ 2(p+2) \}^2 - 3 \cdot 12p = 4(p-1)(p-4)$$

となるから、方程式②の実数解の個数は

$$\begin{cases} 0 < p < 1, 4 < p \text{ のとき } 2 \text{ 個} \\ p = 1, 4 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ 1 < p < 4 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \end{cases}$$

である。ここで、方程式①の解は、方程式②の解に $t = 0$ を加えたものであり、接点の個数と接線の本数は一致するから、求める接線の本数は

$$\begin{cases} 0 < p < 1, 4 < p \text{ のとき, } 3 \text{ 本} \\ p = 1, 4 \text{ のとき, } 2 \text{ 本} \\ 1 < p < 4 \text{ のとき, } 1 \text{ 本} \end{cases}$$

である。

(答) $\begin{cases} 0 < p < 1, 4 < p \text{ のとき, } 3 \text{ 本} \\ p = 1, 4 \text{ のとき, } 2 \text{ 本} \\ 1 < p < 4 \text{ のとき, } 1 \text{ 本} \end{cases}$

問3

問2の結果より、接線の本数が2本のとき、 $p = 1, 4$ である。まず、 $p = 4$ の場合の接線の傾きを考えると、方程式①より $t = 0, 4$ となるが、それぞれの t の値における接線の傾きは $0, 64$ であり、接線の傾きが負とならず不適である。よって、 $p = 1$ の場合を考えると、方程式①より

$$\begin{aligned} t^2 \{ 3t^2 - 4(1+2)t + 12 \cdot 1 \} &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 (t-2)^2 &= 0 \\ \therefore t &= 0, 2 \end{aligned}$$

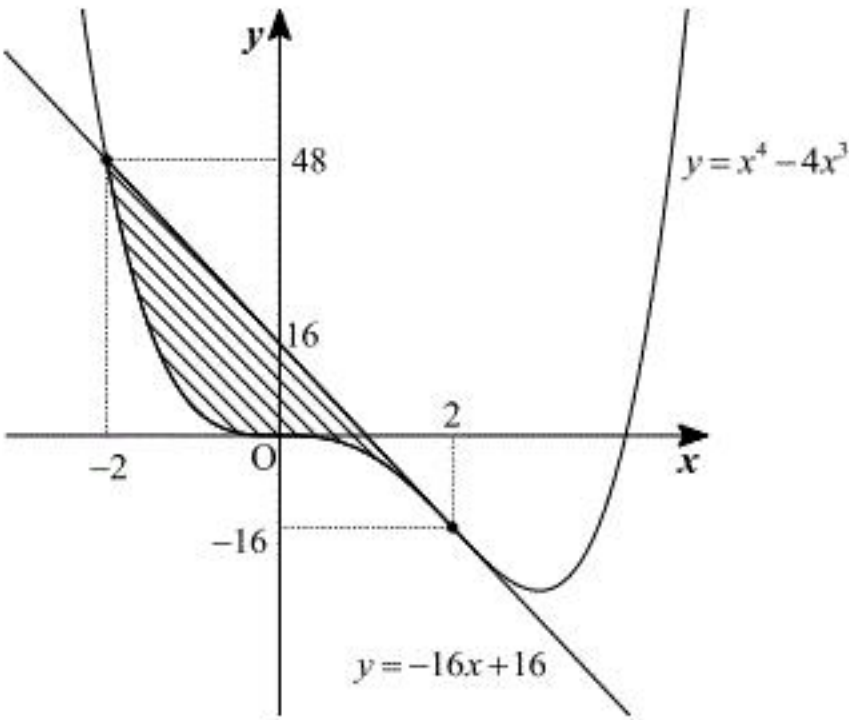
が得られる。 $t = 2$ のとき、接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (4 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2)x - 3 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^3 \\ &= -16x + 16 \end{aligned}$$

となり、確かに傾きは負である。これと $y = x^4 - 4x^3$ を連立すると

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 &= -16x + 16 \\ \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 16x - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)^3 (x+2) &= 0 \\ \therefore x &= \pm 2 \end{aligned}$$

が直線 l と曲線 $y = x^4 - 4x^3$ の交点の x 座標である。



求めるのは上図の斜線部分の面積であるから、奇関数・偶関数の性質も利用すると、

$$\int_{-2}^2 \{ -16x + 16 - (x^4 - 4x^3) \} dx = 2 \int_0^2 (-x^4 + 16) dx = 2 \left[-\frac{1}{5}x^5 + 16x \right]_0^2 = \frac{256}{5}$$

となる。

(答) $\frac{256}{5}$

第6問

問1

r を正の実数、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とし、 $z=r(\cos \theta+i\sin \theta)$ とおく。ド・モアブルの定理より

$$z^3=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

であるから、 n を整数とすると、

$$z^3=i$$

$$\Leftrightarrow r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos \frac{\pi}{2}+i\sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow r^3=1 \text{ かつ } 3\theta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

$$\Leftrightarrow r=1 \text{ かつ } \theta=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi$$

となる。ここで、 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから、これを満たす θ の値は

$$\theta=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi$$

である。よって、 $\arg z_1<\arg z_2<\arg z_3$ より、3つの解はそれぞれ

$$z_1=\cos \frac{\pi}{6}+i\sin \frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$z_2=\cos \frac{5}{6}\pi+i\sin \frac{5}{6}\pi=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$$

$$z_3=\cos \frac{3}{2}\pi+i\sin \frac{3}{2}\pi=-i$$

である。

$$\text{(答)} \quad z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{2}, z_2=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}, z_3=-i$$

問2

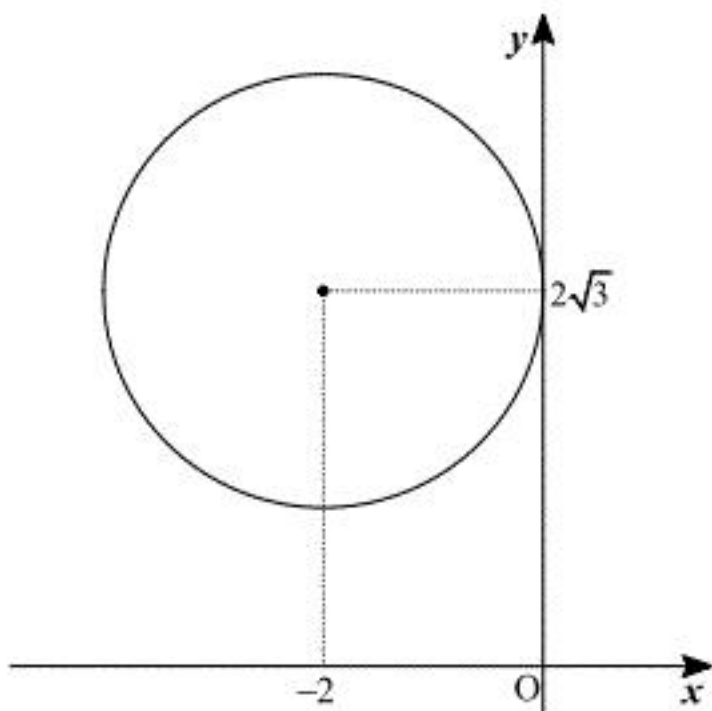
$$z\bar{z}+2(z+\bar{z})+2\sqrt{3}i(z-\bar{z})+12=0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}+(2+2\sqrt{3}i)z+(2-2\sqrt{3}i)\bar{z}+12=0$$

$$\Leftrightarrow \left| z+2-2\sqrt{3}i \right|^2=4$$

$$\therefore \left| z+2-2\sqrt{3}i \right|=2$$

より、点 z 全体が表す図形は、中心 $-2+2\sqrt{3}i$ 、半径 2 の円である。図示すると以下のようになる。



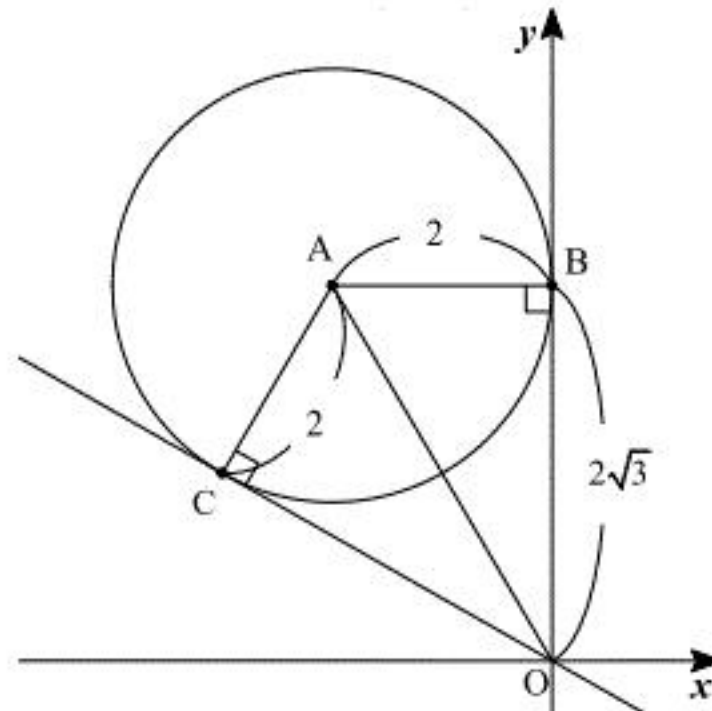
(答) 軌跡： $-2+2\sqrt{3}i$ を中心とする半径 2 の円，図形：前図

問3

a が正の実数であることから、問1の結果を利用すると、

$$\begin{cases} \left| z_0 \right|^3=a & \cdots \cdots \text{①} \\ \arg z_0=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

である。



ここで、点 $(0, 0)$ を通り、問2で求めた円に接する直線のうち y 軸でないものを上図のように

引き、さらに3点 A, B, C を定める。 $\angle AOB=\angle AOC=\frac{\pi}{6}$ であるから、 z_0 が円上にあるとき、

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg z_0 \leq \frac{5}{6}\pi \cdots \cdots \text{③}$$

である。③を満たすのは、②のうち

$$\arg z_0=\frac{5}{6}\pi$$

のみであり、 z_0 は点 C であることがわかる。このとき、 $\left| z_0 \right|=OB=2\sqrt{3}$ であるから、

$$z_0=2\sqrt{3}\left(\cos \frac{5}{6}\pi+i\sin \frac{5}{6}\pi \right)=-3+\sqrt{3}i$$

である。また、①より

$$a=\left(2\sqrt{3} \right)^3=24\sqrt{3}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad z_0=-3+\sqrt{3}i, a=24\sqrt{3}$$