

第 1 問

問 1

(a, b, c) の組み合わせは 6^3 通り存在し、どの目の出方も同様に確からしい。 $f(x)=0$ の判別式を D とすると、 $f(x)=0$ が重解を持つ条件は、 $D=0$ 、すなわち $b^2-4ac=0$ である。ここで、組 (a, c) に対する $4ac$ の値を以下の表に示す。ただし、 $4ac$ が 36 より大きい場合は $\bigcirc$ とした。

$a \setminus c$	1	2	3	4	5	6
1	4	8	12	16	20	24
2	8	16	24	32	○	○
3	12	24	36	○	○	○
4	16	32	○	○	○	○
5	20	○	○	○	○	○
6	24	○	○	○	○	○

$b^2=1, 4, 9, 16, 25, 36$ であるから、 $4ac$ が $1, 4, 9, 16, 25, 36$ のいずれかに等しくなればよい。これを満たす組 (a, c) の数は、表より、 $(1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1)$ の 5 組存在する。よって求める確率は

$$\frac{5}{6^3}=\frac{5}{216}$$

である。

(答) $\frac{5}{216}$

問 2

題意より、 $D>0$ すなわち $4ac<b^2$ が条件である。まず、 $4ac\geq 4\cdot 1\cdot 1=4$ であるから、 $b^2=1, 4$ に対して $4ac<b^2$ となる組 (a, c) は存在しない。したがって、 $b^2=9, 16, 25, 36$ のときを考えればよい。以下、 b^2 の値で場合分けする。

- [1] $b^2=9$ のとき
 $4ac<9$ となる組 (a, c) は、表より $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の 3 組存在する。
- [2] $b^2=16$ のとき
 $4ac<16$ となる組 (a, c) は、表より、[1] の 3 組に加えて $(1, 3), (3, 1)$ の 2 組存在するから、合計 5 組存在する。
- [3] $b^2=25$ のとき
 $4ac<25$ となる組 (a, c) は、表より、[2] の 5 組に加えて $(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$ の 9 組存在するから、合計 14 組存在する。
- [4] $b^2=36$ のとき
 $4ac<36$ となる組 (a, c) は、表より、[3] の 14 組に加えて $(2, 4), (4, 2)$ の 2 組存在するから、合計 16 組存在する。

以上、[1], [2], [3], [4] より、求める確率は

$$\frac{3+5+14+16}{6^3}=\frac{19}{108}$$

である。

(答) $\frac{19}{108}$

問 3

求める確率は、問 1、問 2 の余事象の確率であるから、

$$1-\left(\frac{5}{216}+\frac{19}{108}\right)=\frac{173}{216}$$

である。

(答) $\frac{173}{216}$

問 4

2 次方程式 $f(x)=0$ において解と係数の関係から、 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$ であり、

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

となる。よって、 $N=\frac{b^2-2ac}{a^2}$ において、

$$\text{「}D>0\text{」かつ「}N\text{ が自然数」}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となる組 (a, b, c) を求めればよい。

- [1] $a=1$ のとき
 $D=b^2-4c, N=b^2-2c$ であるから、 $\textcircled{1}$ は $b^2>4c$ と同値である。
 $b^2=1, 4$ のとき、 $b^2>4c$ となる c は存在しない。
 $b^2=9$ のとき、 $c=1, 2$ とすれば $b^2>4c$ は成り立つ。
 $b^2=16$ のとき、 $c=1, 2, 3$ とすれば $b^2>4c$ は成り立つ。
 $b^2=25, 36$ のとき、 $c=1, 2, \cdots, 6$ で $b^2>4c$ は成り立つ。
したがって、計 17 組が $\textcircled{1}$ を満たす。
- [2] $a=2$ のとき、
 $D=b^2-8c$ より $b^2>8c\geq 8\cdot 1=8$ であり、
$$N=\frac{b^2-4c}{4}\Leftrightarrow b^2=4(N+c)$$

と変形できる。 $N+c$ は整数であるから、 b^2 が 4 の倍数であることが必要である。したがって、 $b^2=16, 36$ に限られる。
 $b^2=16$ のとき、 $c=1$ とすれば $b^2>8c$ は成り立つ。
 $b^2=36$ のとき、 $c=1, 2, 3, 4$ とすれば $b^2>8c$ は成り立つ。
したがって、計 5 組が $\textcircled{1}$ を満たす。
- [3] $a=3$ のとき
 $D=b^2-12c$ より $b^2>12c\geq 12\cdot 1=12$ であり、
$$N=\frac{b^2-6c}{9}\Leftrightarrow b^2=3(3N+2c)$$

と変形できる。 $3N+2c$ は整数であるから、 b^2 が 3 の倍数であることが必要である。したがって、 $b^2=36$ に限られる。すると、 $D=36-12c$ より、 $D>0$ を満たす c は $c=1, 2$ に限られるが、このとき $N=4-\frac{2}{3}c$ は自然数とならないため不適である。
- [4] $a=4$ のとき
$$N=\frac{b^2-8c}{16}\Leftrightarrow b^2=8(2N+c)$$

と変形できる。 $2N+c$ は整数であるから、 b^2 が 8 の倍数であることが必要となる。したがって、 $b^2=16$ に限られる。しかしこのとき $D=16-16c\leq 0$ となり不適である。
- [5] $a=5$ のとき
$$N=\frac{b^2-10c}{25}\Leftrightarrow b^2=5(5N+2c)$$

と変形できる。 $5N+2c$ は整数であるから、 b^2 が 5 の倍数であることが必要となる。したがって、 $b^2=25$ に限られる。しかしこのとき $N=1-\frac{2}{5}c<1$ となり不適である。
- [6] $a=6$ のとき
$$N=\frac{b^2-12c}{36}<\frac{b^2}{36}\leq\frac{36}{36}=1$$
 より不適である。

以上、[1]-[6] から、求める確率は

$$\frac{17+5}{6^3}=\frac{11}{108}$$

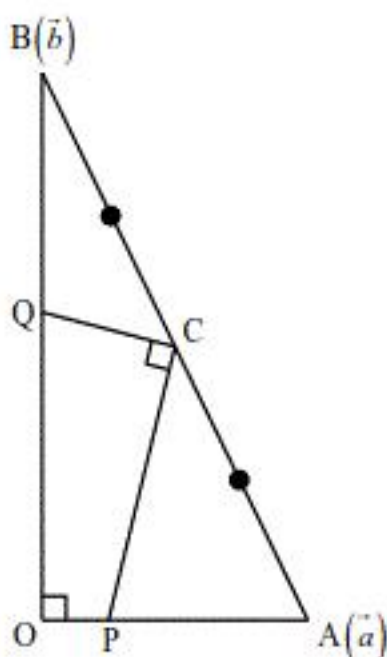
である。

(答) $\frac{11}{108}$

第2問

問1

△OABおよび3点P, Q, Cを図示すると以下の図のようになる。



Cは線分ABの中点であるから、

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

である。

$$(答) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

問2

Pは線分OA上に、Qは線分OB上にあるから、 $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{b} = 0$, $\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{a} = 0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{CQ} \cdot \vec{a} &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}) \cdot \vec{b} + (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC}) \cdot \vec{a} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \vec{b} - \overrightarrow{OC} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{OQ} \cdot \vec{a} - \overrightarrow{OC} \cdot \vec{a} \\ &= -\overrightarrow{OC} \cdot \vec{b} - \overrightarrow{OC} \cdot \vec{a} \\ &= -\overrightarrow{OC} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\overrightarrow{OC} \cdot 2\overrightarrow{OC} \\ &= -2|\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= -2d^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad -2d^2$$

問3

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}) \cdot \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OC} - 2|\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OC} - 2d^2 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、Pは線分OA上に、Qは線分OB上にあるから $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ である。また $\angle PCQ = 90^\circ$ より、 $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{CQ}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) + |\overrightarrow{OC}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 - \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) + d^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OC} &= d^2 \end{aligned}$$

と計算できる。よって、

$$(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}) \cdot \overrightarrow{OC} = d^2 - 2d^2 = -d^2$$

となる。

$$(答) \quad -d^2$$

問4

問1～問3より、

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}) \cdot \overrightarrow{OC} &= -d^2 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ}) \cdot \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) &= -d^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{CP} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{CQ} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{CQ} \cdot \vec{b}) &= -d^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{CQ} \cdot \vec{b} - 2d^2) &= -d^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{CQ} \cdot \vec{b} - 2d^2 &= -2d^2 \\ \therefore \overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} + \overrightarrow{CQ} \cdot \vec{b} &= 0 \end{aligned}$$

を得る。

$$(答) \quad 0$$

第 3 問

問 1

題意より $a_n = a + d(n-1)$, $b_n = br^{n-1}$ である。 $r=1$ のとき $b_n = b$ であるから,

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \cdots + \frac{a_n}{b} \\ &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b} \\ &= \frac{1}{b} \cdot \frac{n}{2} \{a + a + d(n-1)\} \\ &= \frac{n}{2b} \{2a + d(n-1)\} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{n}{2b} \{2a + d(n-1)\}$$

問 2

$d=0$ のとき $a_n = a$ であるから,

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{b} + \frac{a}{br} + \cdots + \frac{a}{br^{n-1}} \\ &= \frac{a}{b} \left(1 + \frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{r^{n-1}} \right) \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}} \\ &= \frac{a}{b(r-1)} \left(r - \frac{1}{r^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{a}{b(r-1)} \left(r - \frac{1}{r^{n-1}} \right)$$

問 3

$$\begin{aligned} S &= \frac{a}{b} + \frac{a+d}{br} + \cdots + \frac{a+(n-1)d}{br^{n-1}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{r} S &= \frac{a}{br} + \frac{a+d}{br^2} + \cdots + \frac{a+(n-1)d}{br^n} \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} S - \frac{1}{r} S &= \frac{a}{b} + \left(\frac{a+d}{br} - \frac{a}{br} \right) + \left(\frac{a+2d}{br^2} - \frac{a+d}{br^2} \right) + \cdots + \left\{ \frac{a+(n-1)d}{br^{n-1}} - \frac{a+(n-2)d}{br^{n-1}} \right\} - \frac{a+(n-1)d}{br^n} \\ &= \frac{a}{b} - \frac{a+(n-1)d}{br^n} + \frac{d}{b} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{r^k} \\ &= \frac{a}{b} - \frac{a+(n-1)d}{br^n} + \frac{d}{b} \cdot \frac{\frac{1}{r} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{r} \right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{r}} \\ &= \frac{a}{b} - \frac{a+(n-1)d}{br^n} + \frac{d}{b(r-1)} \left(1 - \frac{1}{r^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

となるから, $r \neq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{r} \right) S &= \frac{a}{b} - \frac{a+(n-1)d}{br^n} + \frac{d}{b(r-1)} \left(1 - \frac{1}{r^{n-1}} \right) \\ \therefore S &= \frac{ar}{b(r-1)} - \frac{a+(n-1)d}{br^{n-1}(r-1)} + \frac{dr}{b(r-1)^2} \left(1 - \frac{1}{r^{n-1}} \right) \left(\because 1 - \frac{1}{r} \neq 0 \right) \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{ar}{b(r-1)} - \frac{a+(n-1)d}{br^{n-1}(r-1)} + \frac{dr}{b(r-1)^2} \left(1 - \frac{1}{r^{n-1}} \right)$$

問 4

問 3 の S について, $a=1, b=1, d=2, r=3$ とすると,

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} - \frac{1+2(n-1)}{3^{n-1} \cdot 2} + \frac{2 \cdot 3}{2^2} \left(1 - \frac{1}{3^{n-1}} \right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n-1}{3^{n-1} \cdot 2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2 \cdot 3^{n-1}} \\ &= 3 - \frac{n+1}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 3 - \frac{n+1}{3^{n-1}}$$

第4問

問1

$y=x^2$ を x で微分すると $y'=2x$ となるから、直線 ℓ の方程式は

$$\ell: y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2 \Leftrightarrow y=2\alpha x-\alpha^2$$

と表せる。同様に直線 m の方程式は

$$m: y=2\beta x-\beta^2$$

となる。2直線の交点の x 座標は、2直線の方程式を連立して y を消去すると

$$\begin{aligned} 2\alpha x-\alpha^2 &= 2\beta x-\beta^2 \\ \Leftrightarrow 2(\beta-\alpha)x &= \beta^2-\alpha^2 \\ \therefore x &= \frac{\alpha+\beta}{2} \quad (\because \beta-\alpha>0) \end{aligned}$$

より、直線 ℓ の方程式に代入して $y=a\beta$ を得る。したがって

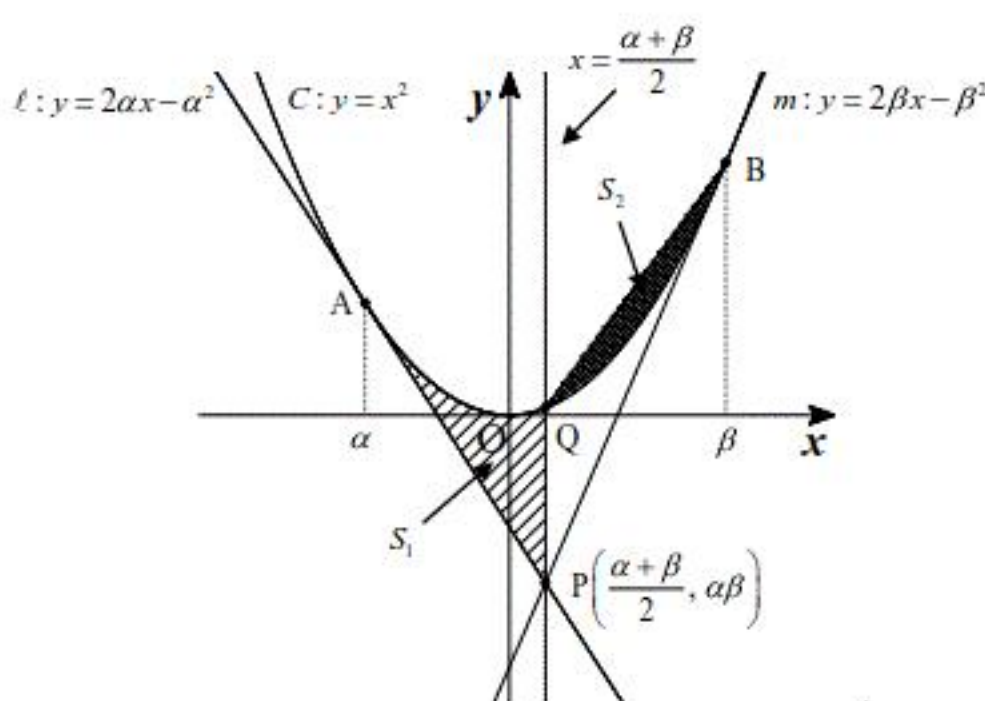
$$(u, v) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, a\beta \right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad (u, v) = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, a\beta \right)$$

問2

直線 ℓ, m 、曲線 C 、点 A, B, P, Q を図示すると下図を得る。このとき、 S_1, S_2 はそれぞれ下図の斜線部の面積、打点部の面積に等しくなる。



上図より、 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{\alpha}^u \{x^2 - (2\alpha x - \alpha^2)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^u (x-\alpha)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3 \right]_{\alpha}^u \\ &= \frac{1}{3}(u-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) - \alpha \right\}^3 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right)^3 \end{aligned}$$

となる。また、 S_2 は上図の打点部の面積であり、直線 BQ の方程式を $y=mx+n$ とすると、直線 BQ と放物線 C は2点 B, Q で交わることから、

$$x^2 - (mx+n) = (x-u)(x-\beta)$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_u^{\beta} \{(mx+n) - x^2\} dx \\ &= - \int_u^{\beta} (x-u)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-u)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \beta - \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right)^3 \end{aligned}$$

となる。よって

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \right)^3 = \frac{1}{16}(\beta-\alpha)^3$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{16}(\beta-\alpha)^3$$

問3

$P(u, v)$ は M 上にあるため、

$$v = -u^3 + 4u^2 - 5 \quad (u > 0)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (2u)^2 - 4v \\ &= 4(u^2 - v) \\ &= 4\{u^2 - (-u^3 + 4u^2 - 5)\} \\ &= 4(u^3 - 3u^2 + 5) \end{aligned}$$

となる。そこで、 $f(u) = u^3 - 3u^2 + 5$ とし、 $u > 0$ のもとで $f(u)$ の最大値を求める。

$$f'(u) = 3u^2 - 6u = 3u(u-2)$$

より、増減表は次のようになる。

u	0	...	2	...
$f'(u)$	↗	-	0	+
$f(u)$	↗	↘	1	↗

したがって $f(u)$ の最小値は1であるから、 $(\beta-\alpha)^2$ は $u=2$ のとき最小値4をとる。またこのとき、 $\beta-\alpha > 0$ より $\beta-\alpha=2$ である。

$$(\text{答}) \quad 4$$

問4

$S = \frac{1}{16}(\beta-\alpha)^3$ であり、 $\beta-\alpha > 0$ であるから、 $(\beta-\alpha)^2$ が最小値をとるとき S も最小値をとる。

よって、問3の結果より S の最小値は $\frac{1}{16} \cdot 2^3 = \frac{1}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

第 5 問

問 1

$$\begin{aligned}g(t)-af(t)-b&=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(t-\frac{1}{t}\right)-a\left(t+\frac{1}{t}-2\right)-b\\&=t\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-a\right)-\frac{1}{t}\left(a+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2a-b\end{aligned}$$

であり、 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} = \infty$ であるから、 $a + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$ 、すなわち $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ が必要である。またこのとき、

$$\lim_{t \rightarrow +0} \{g(t) - af(t) - b\} = 2a + b = -\frac{2\sqrt{3}}{3} - b$$

となるから、 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} - b = 0$ 、すなわち $b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ とすれば、 $\lim_{t \rightarrow +0} \{g(t) - af(t) - b\} = 0$ が成り立つ。

よって求める a, b は $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ である。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

問 2

$t > 0, \frac{1}{t} > 0$ より、相加相乗平均の関係から、 $f(t) \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} - 2 = 0$ である。等号は $t = 1$ のとき成立する。したがって、 x の取りうる範囲は $x \geq 0$ である。また、 $g(t)$ は $t > 0$ で連続であり、

$\lim_{t \rightarrow +0} g(t) = -\infty, \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ であるから、 y の取りうる範囲は全ての实数である。さらに、

$x = t + \frac{1}{t} - 2, y = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ であるから、

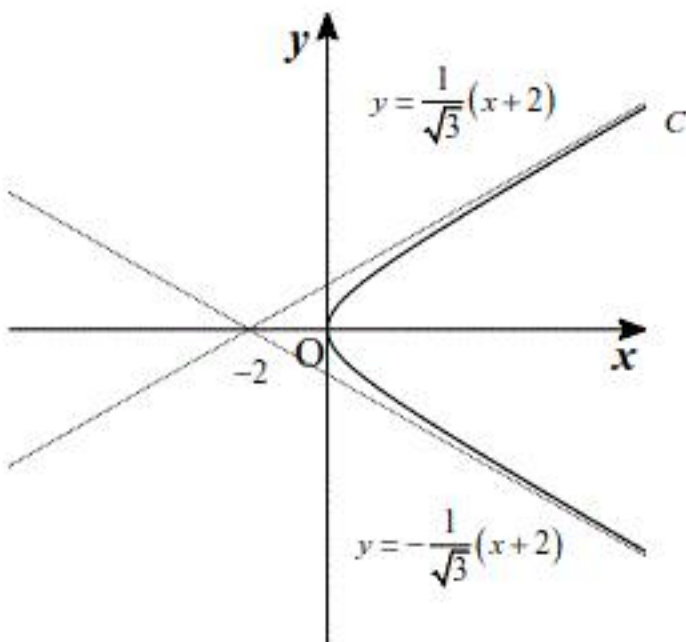
$$\begin{aligned}(x+2)^2 - (\sqrt{3}y)^2 &= \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 - 3y^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{3y^2}{4} &= 1\end{aligned}$$

となる。したがって、 C は双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$ を x 軸方向に 2 だけ動かしたグラフの一部であ

る。同様にして C の漸近線は、双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1$ の漸近線 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$ を x 軸方向に 2 だけ動

かした直線であるから、その方程式は $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$ である。よって、概形は下図の実線のよ

うになる。



$$(\text{答}) \quad \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{3y^2}{4} = 1 \quad (x \geq 0), \text{ グラフは前図}$$

問 3

$$\begin{aligned}F(t) &= \{f(t) + 7\}^2 + \{g(t) - 5\sqrt{3}\}^2 \\ &= \left(t + \frac{1}{t} + 5\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}t - \frac{\sqrt{3}}{3t} - 5\sqrt{3}\right)^2 \\ &= t^2 + \frac{1}{t^2} + 5^2 + 2\left(t \cdot \frac{1}{t} + \frac{5}{t} + 5t\right) + \frac{t^2}{3} + \frac{1}{3t^2} + (5\sqrt{3})^2 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}t \cdot \frac{\sqrt{3}}{3t} + \frac{\sqrt{3}}{3t} \cdot 5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}t \cdot 5\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(t^2 + \frac{15}{t} + \frac{1}{t^2} + 76\right)\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{3}\left(t^2 + \frac{15}{t} + \frac{1}{t^2} + 76\right)$$

問 4

問 3 の結果より

$$\begin{aligned}F'(t) &= \frac{4}{3}\left(2t - \frac{15}{t^2} - \frac{2}{t^3}\right) \\ &= \frac{4}{3t^3}(2t^4 - 15t - 2) \\ &= \frac{4}{3t^3}(t-2)(2t^3 + 4t^2 + 8t + 1)\end{aligned}$$

と因数分解できる。 $t > 0$ では $2t^3 + 4t^2 + 8t + 1 > 0$ であるから、 $F'(t)$ の符号は $t-2$ の符号と一致する。よって増減表は下のようになる。

t	0	...	2	...
$F'(t)$		-	0	+
$F(t)$		$\searrow$	117	$\nearrow$

したがって、 $F(t)$ の最小値は $t = 2$ のとき 117 である。よって AP の最小値は $\sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ である。

$$(\text{答}) \quad t = 2 \text{ のとき最小値 } 3\sqrt{13}$$

第 6 問

問 1

平面 $z = p$ 上において C の方程式は、

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + p^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= a^2 - p^2 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

であるから、 x の取りうる範囲は $-\sqrt{a^2 - p^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - p^2}$ である。よって、 C と $x = t$ が共有

点をもつための条件は、 $-\sqrt{a^2 - p^2} \leq t \leq \sqrt{a^2 - p^2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{a^2 - p^2} \leq t \leq \sqrt{a^2 - p^2}$$

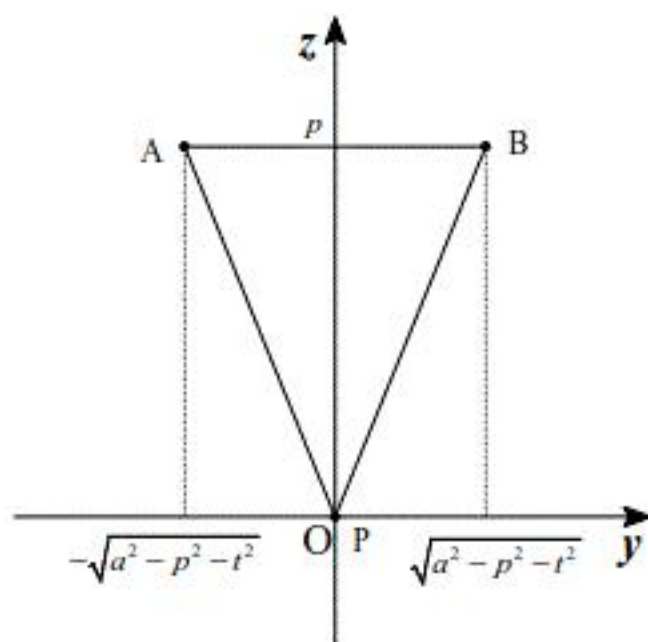
問 2

①に $x = t$ を代入して

$$\begin{aligned}t^2 + y^2 &= a^2 - p^2 \\ \Leftrightarrow y &= \pm \sqrt{a^2 - p^2 - t^2}\end{aligned}$$

より、 C と $x = t$ の 2 つの共有点を $A(t, -\sqrt{a^2 - p^2 - t^2}, p)$, $B(t, \sqrt{a^2 - p^2 - t^2}, p)$ とする。また、

$P(t, 0, 0)$ とすると、 $x = t$ における yz 平面において、 $\triangle APB$ は下図のような二等辺三角形となっている。



よって求める面積は、

$$S = \frac{1}{2} p \left\{ \sqrt{a^2 - p^2 - t^2} - \left(-\sqrt{a^2 - p^2 - t^2} \right) \right\} = p \sqrt{a^2 - p^2 - t^2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = p \sqrt{a^2 - p^2 - t^2}$$

問 3

$u = \sqrt{a^2 - p^2}$ とすると、 $S = \sqrt{u^2 - t^2}$, $-u < t < u$ であるから、

$$V = \int_{-u}^u S dt = \int_{-u}^u p \sqrt{u^2 - t^2} dt = p \int_{-u}^u \sqrt{u^2 - t^2} dt$$

となり、 $\int_{-u}^u \sqrt{u^2 - t^2} dt$ は、半径 u の半円の面積に等しいから、

$$\int_{-u}^u \sqrt{u^2 - t^2} dt = \frac{1}{2} \pi u^2 = \frac{1}{2} \pi (a^2 - p^2)$$

である。したがって、

$$V = p \cdot \frac{1}{2} \pi (a^2 - p^2) = \frac{\pi}{2} (a^2 p - p^3)$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{\pi}{2} (a^2 p - p^3)$$

問 4

$0 < p < a$ における V の最大値を求める。 V を p で微分すると

$$\frac{dV}{dp} = \frac{\pi}{2} (a^2 - 3p^2) = -\frac{3\pi}{2} \left(p + \frac{1}{\sqrt{3}} a \right) \left(p - \frac{1}{\sqrt{3}} a \right)$$

となる。したがって、増減表は下のようになる。

p	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}} a$	...	a
$\frac{dV}{dp}$		+	0	-	
V		↗	$\frac{\sqrt{3}}{9} \pi a^3$	↘	

よって、増減表より V は $p = \frac{1}{\sqrt{3}} a$ のときに最大値 $\frac{\sqrt{3}}{9} \pi a^3$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{9} \pi a^3$$