

第1問

問1

カードの取り出し方の総数は、

$$8^4 = 4096 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしい。 $abcd$ が奇数であることと、 a, b, c, d がすべて奇数であることは同値である。1以上8以下の奇数は、1, 3, 5, 7の4個であるから、条件を満たすような組 (a, b, c, d) は、

$$4^4 = 256 \text{ (通り)}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{256}{4096} = \frac{1}{16}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{16}$$

問2

$$(a-1)(b-2)(c-3)(d-4) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow a \neq 1 \text{ かつ } b \neq 2 \text{ かつ } c \neq 3 \text{ かつ } d \neq 4$$

であるから、条件を満たすような組 (a, b, c, d) は、

$$(8-1)^4 = 2401 \text{ (通り)}$$

である。ゆえに、求める確率は、 $\frac{2401}{4096}$ である。

$$\text{(答)} \quad \frac{2401}{4096}$$

問3

玉7個を横に並べ、玉と玉の間6箇所に仕切り3つを入れ、4つに分けられた部分にある玉の個数を左から順に a, b, c, d とすることを考えると、条件を満たす組 (a, b, c, d) の総数は仕切りの入れ方の総数に一致する。よって、

$${}_6C_3 = 20 \text{ (通り)}$$

である。ゆえに、求める確率は $\frac{20}{4096} = \frac{5}{1024}$ である。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{1024}$$

問4

$c > 0, d > 0$ より、 $cd > 0$ であるから、条件より、

$$(a-1)(b-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ b < 2 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} a < 1 \\ b > 2 \end{cases}$$

が必要である。 a は正の整数であるから、 $a \geq 1$ である。したがって、

$$\begin{cases} a > 1 \\ b < 2 \end{cases}$$

となる。ゆえに、 $b = 1$ である。このとき、条件より、

$$(a-1)(1-2) + cd = 0 \Leftrightarrow cd = a-1$$

であるから、

$$a = 2 \text{ のとき, } (c, d) = (1, 1)$$

$$a = 3 \text{ のとき, } (c, d) = (1, 2), (2, 1)$$

$$a = 4 \text{ のとき, } (c, d) = (1, 3), (3, 1)$$

$$a = 5 \text{ のとき, } (c, d) = (1, 4), (2, 2), (4, 1)$$

$$a = 6 \text{ のとき, } (c, d) = (1, 5), (5, 1)$$

$$a = 7 \text{ のとき, } (c, d) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$$

$$a = 8 \text{ のとき, } (c, d) = (1, 7), (7, 1)$$

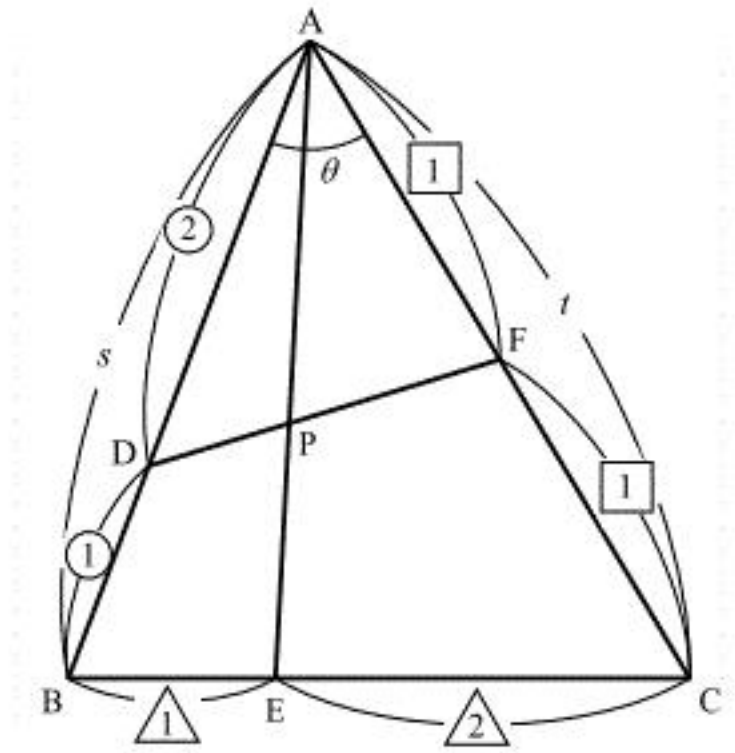
となる。したがって、条件を満たすような組 (a, b, c, d) は16通りあるから、求める確率は、

$$\frac{16}{4096} = \frac{1}{256}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{256}$$

第2問



問1

点Eは辺BCを1:2に内分する点であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \\ &= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

問2

点Pは直線AE上の点であるから、実数kを用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= k\overrightarrow{AE} \\ &= \frac{2}{3}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

と書ける。また、点Pは直線DF上の点であり、

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

であるから、実数pを用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= p\overrightarrow{AD} + (1-p)\overrightarrow{AF} \\ &= \frac{2}{3}p\vec{b} + \frac{1-p}{2}\vec{c} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

と書ける。 $\vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから、①、②より、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \frac{2}{3}k = \frac{2}{3}p \\ \frac{1}{3}k = \frac{1-p}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = p \\ 2k = 3 - 3p \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = p \\ 2k = 3 - 3k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow k = p = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに、

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}$

問3

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP}|^2 &= \frac{4}{25}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{25}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{25}|\vec{c}|^2 \\ &= \frac{4}{25}s^2 + \frac{4}{25}st\cos\theta + \frac{1}{25}t^2\end{aligned}$$

であるから、線分APの長さは、

$$\sqrt{\frac{4}{25}s^2 + \frac{4}{25}st\cos\theta + \frac{1}{25}t^2} = \frac{\sqrt{4s^2 + 4st\cos\theta + t^2}}{5}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{4s^2 + 4st\cos\theta + t^2}}{5}$

問4

辺ABの中点をMとおく。いま、

Pが三角形ABCの外心

$\Leftrightarrow$ Pは線分ABと線分ACの垂直2等分線の交点

$\Leftrightarrow PM \perp AB$ かつ $PF \perp AC$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB = |\overrightarrow{AM}| \text{ かつ } |\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAC = |\overrightarrow{AF}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAB = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AM}| \text{ かつ } |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle PAC = |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AF}|$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}s^2 \text{ かつ } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}t^2$$

であるから、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}s^2 \\ \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}\right) \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}s^2 \\ \left(\frac{2}{5}\vec{b} + \frac{1}{5}\vec{c}\right) \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{2}s^2 \\ \frac{2}{5}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{5}|\vec{c}|^2 = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{5}s^2 + \frac{1}{5}st\cos\theta = \frac{1}{2}s^2 \\ \frac{2}{5}st\cos\theta + \frac{1}{5}t^2 = \frac{1}{2}t^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2st\cos\theta = s^2 \\ 4st\cos\theta = 3t^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t\cos\theta = s \\ 4s\cos\theta = 3t \end{cases} \quad (\because s > 0, t > 0) \quad \dots\dots ③\end{aligned}$$

となる。この第1式と $s > 0, t > 0$ から、

$$\cos\theta = \frac{s}{2t} > 0$$

となることに注意して③からsを消去すると、

$$\begin{aligned}8t\cos^2\theta &= 3t \\ \Leftrightarrow \cos^2\theta &= \frac{3}{8} \quad (\because t > 0) \\ \Leftrightarrow \cos\theta &= \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

である。

(答) $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$

第3問

問1

$$a_{10}=a_1+(10-1)d$$

であるから,

$$57=3+9d\Leftrightarrow d=6$$

となる。

(答) $d=6$

問2

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(a_1+a_{10})\cdot 10 \\ &= \frac{1}{2}(3+57)\cdot 10 \\ &= 300 \end{aligned}$$

となる。

(答) $T=300$

問3

$$\begin{aligned} a_n &= 3+6(n-1) \\ &= 6n-3 \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n 2^{3+6(k-1)} \\ &= \sum_{k=1}^n 8\cdot 64^{k-1} \\ &= 8\cdot \frac{64^n-1}{64-1} \\ &= \frac{8(64^n-1)}{63} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8(64^n-1)}{63}$

問4

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (a_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (6k-3)^2 \\ &= 9\sum_{k=1}^n (4k^2-4k+1) \\ &= 9\left\{4\cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot \frac{1}{2}n(n+1)+n\right\} \\ &= 3n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\} \\ &= 3n(4n^2-1) \\ &= 3n(2n+1)(2n-1) \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n=3n(2n+1)(2n-1)$

問5

$$\frac{S_n}{n}=3(4n^2-1)$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} &\geq 1500 \\ \Leftrightarrow n^2 &\geq \frac{501}{4} \end{aligned}$$

である。ここで、 $n\geq 1$ であり、 n^2 が n について単調増加であることと、

$$\begin{aligned} \frac{501}{4} &< 144=12^2 \\ \frac{501}{4} &> 121=11^2 \end{aligned}$$

より、条件を満たす最小の n は12である。

(答) 12

第4問

問1

$$\begin{aligned} &\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0 \\ \Leftrightarrow &\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right\}=0 \\ \Leftrightarrow &\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)=0 \\ \Leftrightarrow &x=\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}-1, \frac{\sqrt{3}}{3}+1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x=\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}-1, \frac{\sqrt{3}}{3}+1$

問2

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= x^3 - 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 3x \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - x + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= x^3 - \sqrt{3}x^2 + x - \frac{1}{3\sqrt{3}} - x + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= x^3 - \sqrt{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

より、

$$f'(x) = 3x^2 - 2\sqrt{3}x = 3x\left(x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

であるから、

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる。

(答) $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0$

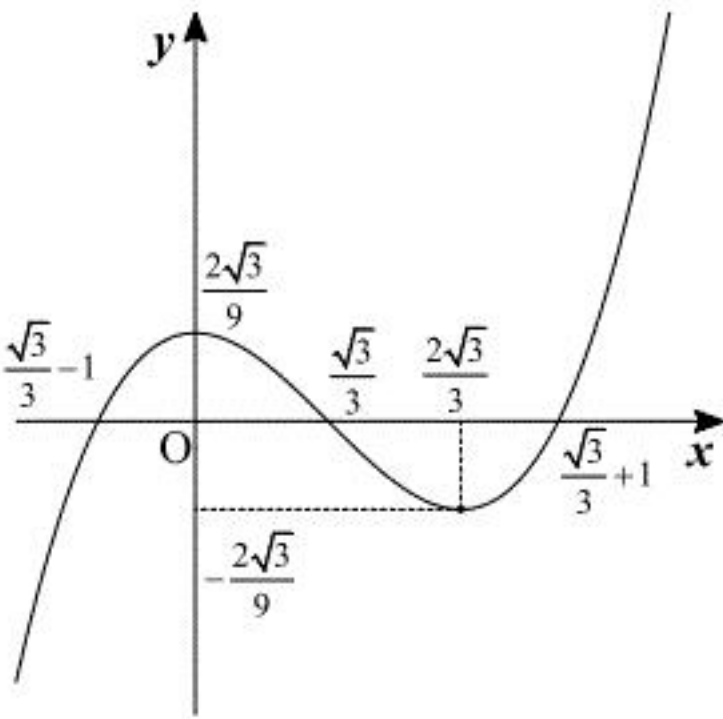
問3

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{2\sqrt{3}}{9} \\ f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) &= \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

より、次の増減表を得る。

x	...	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

これより、 $f(x)$ は、 $x=0$ で極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 、 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ で極小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとり、グラフは下図のようになる。



(答) $x=0$ で極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 、 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ で極小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 、グラフは前図

問4

[1] $t \leq 0$ のとき

$t-1 \leq x \leq t$ において、 $f(x)$ は単調増加であるから、

$$F(t) = f(t)$$

である。

[2] $t-1 \leq 0 \leq t$ すなわち $0 \leq t \leq 1$ のとき

$t-1 \leq x \leq 0$ において、 $f(x)$ は単調増加、 $0 \leq x \leq t$ において、 $f(x)$ は単調減少であるから、

$$F(t) = f(0) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

である。

[3] $0 \leq t-1$ すなわち $t \geq 1$ のとき

$F(t)$ は、 $f(t)$ と $f(t-1)$ のうち、小さくない方に一致する。よって、グラフより、

$$1 \leq t \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 \leq t-1 \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき、} f(t-1) \geq f(t) \text{ であるから、}$$

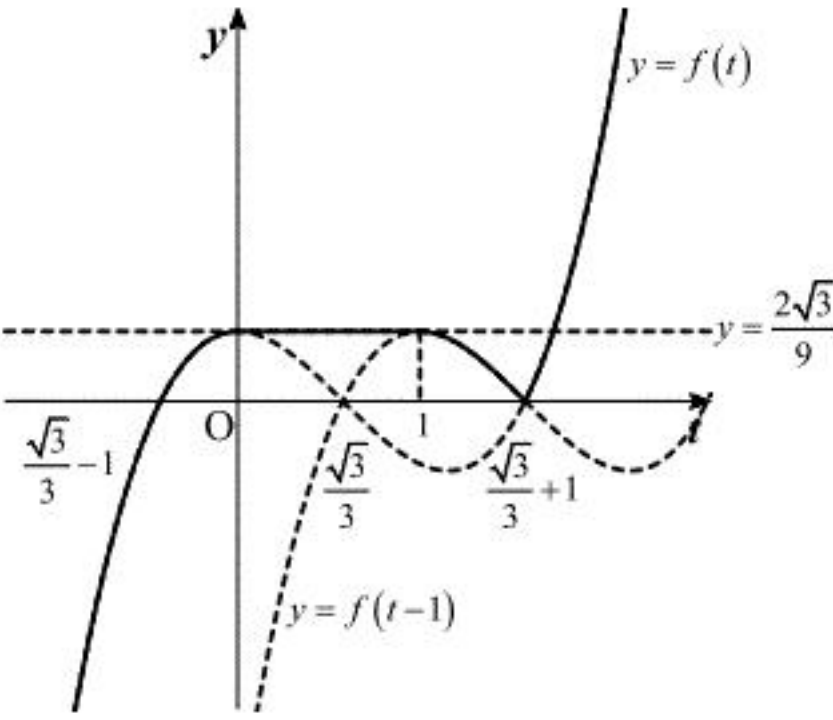
$$F(t) = f(t-1) \text{ であり、}$$

$$t > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow t-1 > \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき、} f(t) > f(t-1) \text{ であるから、} F(t) = f(t)$$

となる。

$y = f(t-1)$ のグラフは、 $y = f(t)$ のグラフを t 軸方向に1だけ平行移動したものであるから、

[1], [2], [3]より、 $y = F(t)$ のグラフは下図の太字実線部分のようになる。



(答) 前図

第5問

問1

$$f'(x)=1-2\sin x$$
$$f''(x)=-2\cos x$$

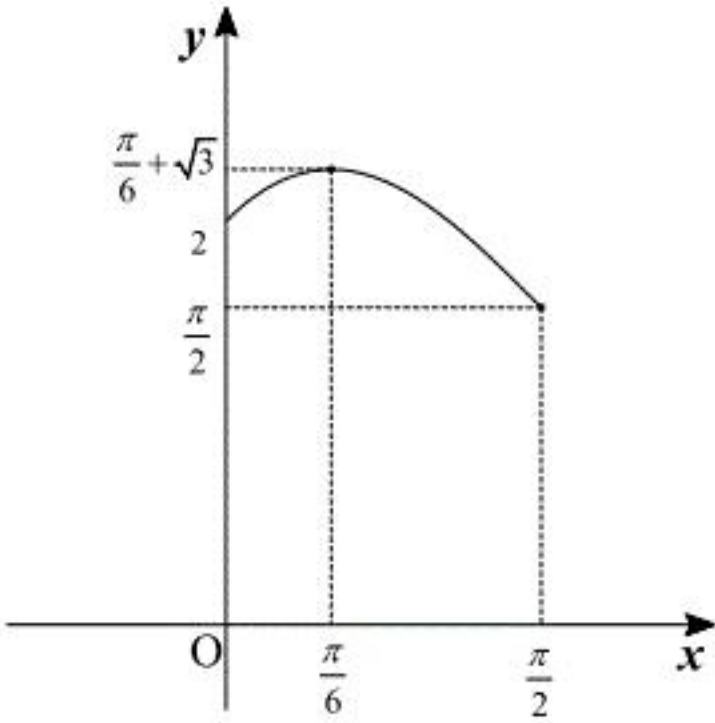
である。ここで、

$$f'(x)>0$$
$$\Leftrightarrow 1-2\sin x>0$$
$$\Leftrightarrow \sin x<\frac{1}{2}$$
$$\therefore 0<x<\frac{\pi}{6}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f'(x)=0$$
$$\Leftrightarrow 1-2\sin x=0$$
$$\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$$
$$\therefore x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$
$$f''(x)=-2\cos x$$
$$<0\left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

であるから、以下の増減表が得られる。

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f''(x)$		-		-	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$

この増減表から、以下のグラフを得る。



(答) 前図

問2

求める接線の方程式は、

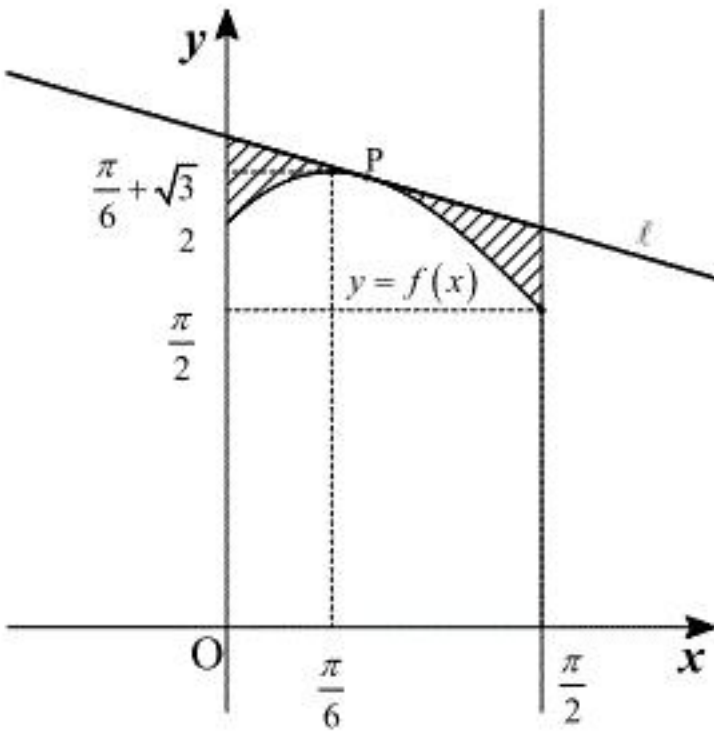
$$y=(1-2\sin a)(x-a)+a+2\cos a$$
$$\Leftrightarrow y=(1-2\sin a)x+2a\sin a+2\cos a$$

である。

(答) $y=(1-2\sin a)x+2a\sin a+2\cos a$

問3

問1、問2より、求める面積は下図斜線部分の面積である。



前図より、求める面積は、

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left\{(1-2\sin a)x+2a\sin a+2\cos a\right\}-\left(x+2\cos x\right)\right]dx$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-x\sin a-\cos x+\cos a+a\sin a\right)dx$$
$$=2\left[\left(-\frac{1}{2}\sin a\right)x^2-\sin x+\left(\cos a+a\sin a\right)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\left\{-\frac{\pi^2}{8}\sin a-1+\frac{\pi}{2}\left(\cos a+a\sin a\right)\right\}$$
$$=\pi\left(a\sin a-\frac{\pi}{4}\sin a+\cos a\right)-2$$

である。

(答) $S=\pi\left(a\sin a-\frac{\pi}{4}\sin a+\cos a\right)-2$

問4

問3で得た式の両辺を a で微分して、

$$S'=\pi\left\{\left(\sin a+a\cos a\right)-\frac{\pi}{4}\cos a-\sin a\right\}$$
$$=\pi\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\cos a$$

であり、 $0<a<\frac{\pi}{2}$ において、 $\cos a>0$ であるから、 S' と $a-\frac{\pi}{4}$ の符号は一致する。ゆえに、以下の増減表を得る。

a	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
S'		-	0	+	
S	$\pi-2$	$\searrow$	$\frac{\pi}{\sqrt{2}}-2$	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{4}-2$

これより、 S の最小値は $\frac{\pi}{\sqrt{2}}-2$ である。

(答) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}-2$

第 6 問

問 1

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\log x + x \cdot \frac{1}{x}}{(x \log x)^2} \\ &= -\frac{\log x + 1}{x^2 (\log x)^2} \end{aligned}$$

であり、 $x > 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \log x &> 0 \\ \therefore \log x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

が成り立つことから、

$$f'(x) < 0$$

が成り立つ。したがって、関数 $f(x)$ は単調減少である。

(証明終)

問 2

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{1}{x \log x} dx &= \int_n^{n+1} \frac{1}{\log x} \cdot (\log x)' dx \\ &= \left[\log |\log x| \right]_n^{n+1} \\ &= \log \left\{ \frac{\log(n+1)}{\log n} \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \log \left\{ \frac{\log(n+1)}{\log n} \right\}$$

問 3

問 1 より、任意の 2 以上の自然数 n に対し、 $n \leq x \leq n+1$ において、常に

$$\frac{1}{x \log x} \leq \frac{1}{n \log n}$$

が成立する。これより、問 2 の結果と合わせると

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{1}{x \log x} dx &\leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n \log n} dx \\ \Leftrightarrow \log \left\{ \frac{\log(n+1)}{\log n} \right\} &\leq \frac{1}{n \log n} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $2 \leq n \leq N$ について、辺々足すと、

$$\sum_{n=2}^N \log \left\{ \frac{\log(n+1)}{\log n} \right\} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \log n}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N \log \left\{ \frac{\log(n+1)}{\log n} \right\} &= \log \left(\frac{\log 3}{\log 2} \right) + \log \left(\frac{\log 4}{\log 3} \right) + \log \left(\frac{\log 5}{\log 4} \right) + \cdots + \log \left\{ \frac{\log(N+1)}{\log N} \right\} \\ &= \log \left\{ \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdots \frac{\log(N+1)}{\log N} \right\} \\ &= \log \left\{ \frac{\log(N+1)}{\log 2} \right\} \end{aligned}$$

が成り立つことから、

$$\log \left\{ \frac{\log(N+1)}{\log 2} \right\} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \log n}$$

が成り立つ。いま、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \log \left\{ \frac{\log(N+1)}{\log 2} \right\} = \infty$$

であるから、追い出しの原理より、

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n \log n} \\ &= \infty \end{aligned}$$

であることがわかる。

(証明終)