

第 1 問 6 個の数字 0, 1, 2, 2, 3, 3 の中から 4 個の数字を使ってできる
4 桁の整数について, 次の各問に答えよ。

問 1 このような整数はいくつあるか。

問 2 このような整数のうちで 3 の倍数はいくつあるか。

問 3 このような整数を小さい順に並べたときに, 2331 は何番目になるか。

第 2 問 次の各問に答えよ。

問 1 次の等式が成り立つことを示せ。

$${}_nC_k + {}nC_{k+1} = {}_{n+1}C_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$$

問 2 問 1 の等式を用いて、すべての自然数 n について

$${}_nC_0 + {}nC_1 + \dots + {}nC_n = 2^n$$

が成り立つことを数学的帰納法で示せ。

第 3 問 3 次関数 $f(x) = x^3 + kx^2 + (k + 1)x$ は $x = \alpha$ のとき極大値,
 $x = \beta$ のとき極小値をとる。このとき, 次の各問に答えよ。

問 1 $\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ を k の式で表せ。

問 2 $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ を k の式で表せ。

問 3 $f(\beta) - f(\alpha) = -\frac{4}{27}$ のとき, k の値を求めよ。

第4問 1辺の長さが1である正四面体 OABC において、三角形 ABC の重心を G とする。また、線分 OA 上に点 P をとり、平面 PBC と直線 OG との交点を Q とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、線分 OP の長さを k とするとき、次の各問に答えよ。

問 1 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

問 2 $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ と k を用いて表せ。

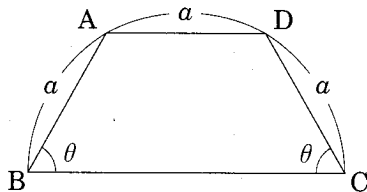
問 3 $|\overrightarrow{AQ}| = 2|\overrightarrow{OQ}|$ であるとき、 k の値を求めよ。

第 5 問 図のような台形 ABCD で、

$$AB = CD = DA = a \quad (a \text{ は定数})$$

$$\angle ABC = \angle BCD = \theta \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

とすると、次の各問に答えよ。



問 1 台形 ABCD の面積 S を a と θ を用いて表せ。

問 2 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かしたとき、 S の増減表を書け。

問 3 台形 ABCD の面積 S の最大値を求めよ。

第 6 問 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。

問 1 A の逆行列 A^{-1} を求めよ。

問 2 すべての自然数 n に対して、

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

が成り立つことを数学的帰納法で示せ。

問 3 $\theta = 36^\circ$ のとき、 A^{19} を求めよ。

ここで、 $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$ 、 $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$ である。

第 7 問 2 つの放物線 $y = x^2 - 1$, $y = x^2 - 8x + 23$ について, 次の各問に答えよ。

問 1 これらの 2 つの放物線には共通する接線がある。この共通する接線の方程式を求めよ。

問 2 これらの 2 つの放物線および共通する接線により囲まれる部分を図示せよ。なお, 2 つの接点, 2 つの放物線の交点の座標を図中に記すこと。

問 3 問 2 で求めた部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を求めよ。