

[1]

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \dots \textcircled{1}$$

である。C が点 $(-1, 0)$ を通ることから、

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -1 + a - b + c &= 0 \\ \therefore c &= -a + b + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + ax^2 + bx + (-a + b + 1) \\ &= (x+1)\{x^2 + (a-1)x + (-a+b+1)\} \end{aligned}$$

と変形できる。条件より、 $f(x) = 0$ を満たす x は $x = -1$ 以外に存在しないことから、

$$g(x) = x^2 + (a-1)x + (-a+b+1)$$

とおくと、方程式 $g(x) = 0$ を満たす実数解は存在しないか、あるいは $x = -1$ のみである。

[1] $g(-1) = 0$ となるとき

$$g(-1) = 0 \Leftrightarrow -2a + b + 3 = 0$$

であるから、

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 + (a-1)x + (a-2) \\ &= (x+1)(x+a-2) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(x) = 0$ を満たす x は $x = -1$ のみであることから、

$$\begin{aligned} 2 - a &= -1 \Leftrightarrow a = 3 \\ b &= 2 \cdot 3 - 3 = 3 \end{aligned}$$

となる。これらを①に代入すると、

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$$

となるが、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3 &= -1 \\ \Leftrightarrow 3(x+1)^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

より、実数の範囲で $f'(x) = -1$ を満たす x は存在しないため、C の接線で傾きが -1 のものがただ1つ存在する仮定に反する。したがって、 $g(-1) = 0$ とならない。

[2] $g(-1) \neq 0$ となるとき

方程式 $g(x) = 0$ は実数解をもたないため、判別式を D_1 とすると、

$$\begin{aligned} D_1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)^2 - 4(-a+b+1) &< 0 \\ \Leftrightarrow b &> \frac{1}{4}(a^2 + 2a - 3) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を満たす。このとき、

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3 - 2a + b \\ &> 3 - 2a + \frac{1}{4}(a^2 + 2a - 3) \\ &= \frac{1}{4}(a-3)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より、 $f'(-1) > 0$ となる。

以上[1], [2]より、 $f'(-1) > 0$ となることが示された。

(証明終)

(2)

3次関数の接点と接線は1対1に対応すること、および、C の接線で傾きが -1 のものがただ1つ存在することから、2次方程式

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 2ax + b &= -1 \end{aligned}$$

は重解をもつ。したがって、この方程式の判別式を D_2 とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D_2}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3(b+1) &= 0 \\ \therefore b &= \frac{1}{3}a^2 - 1 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。一方、(1)の過程より不等式②が成り立つから、③を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}a^2 - 1 &> \frac{1}{4}(a^2 + 2a - 3) \\ \Leftrightarrow a^2 - 6a - 3 &> 0 \\ \therefore a &< 3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3} < a \end{aligned}$$

となる。

(答) $a < 3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3} < a$

(3)

題意より、 $f'(1) = -1$ となるから、

$$3 + 2a + b = -1$$

である。これと③より、

$$\begin{aligned} -2a - 4 &= \frac{1}{3}a^2 - 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + 6a + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+3)^2 &= 0 \\ \therefore a &= -3 \end{aligned}$$

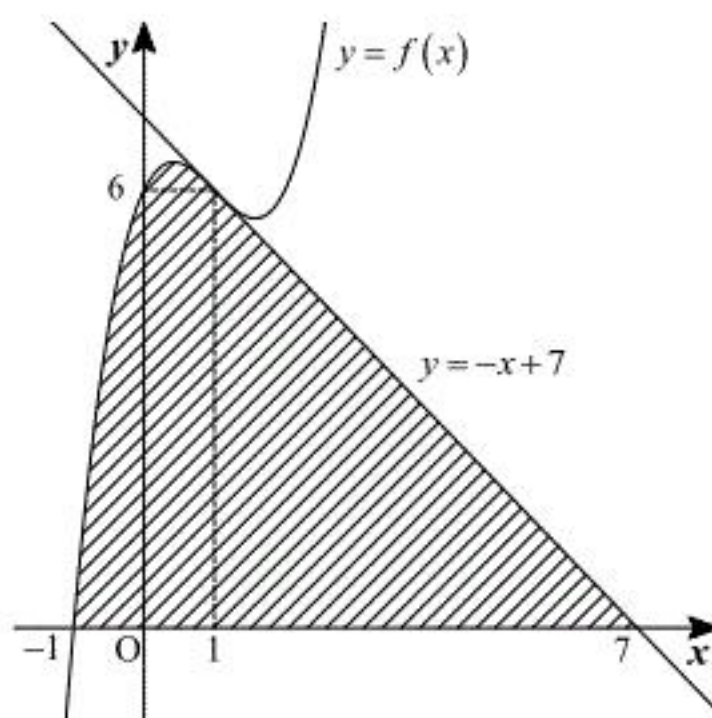
であるから、 $b = 2, c = 6$ となる。よって、C の方程式は

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$$

であり、 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -(x-1) + 6 \\ \therefore y &= -x + 7 \end{aligned}$$

である。以上より、面積を求める部分を図示すると以下のようになる。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 + 2x + 6) dx + \int_1^7 (-x + 7) dx &= 2 \int_0^1 (-3x^2 + 6) dx + \int_1^7 (-x + 7) dx \\ &= 2 \left[-x^3 + 6x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 7x \right]_1^7 \\ &= 28 \end{aligned}$$

となる。

(答) 28

[2]

(1)

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4}a^2+\frac{\pi}{4}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}a^2+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}a^2+\frac{3}{4}\pi\right)\end{aligned}$$

と変形できるから、与式は

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}a^2+\frac{3}{4}\pi\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

[1] $0 \leq a < 1$ のとき

$$\frac{3}{4}\pi \leq \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi < \pi$$

であるから、①を解くと

$$\theta = \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi$$

となる。

[2] $1 \leq a < \sqrt{5}$ のとき

$$\pi \leq \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi < 2\pi$$

$$\Leftrightarrow 0 < 2\pi - \left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{5}{4}\pi \leq \pi$$

であるから、①を解くと、

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\left\{2\pi - \left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$\therefore \theta = -\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{5}{4}\pi$$

となる。

[3] $\sqrt{5} \leq a < 3$ のとき

$$2\pi \leq \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi < 3\pi$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right) - 2\pi = \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{5}{4}\pi < \pi$$

であるから、①を解くと、

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\left\{\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right) - 2\pi\right\}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{5}{4}\pi$$

となる。

[4] $3 \leq a \leq \pi$ のとき

$$3\pi \leq \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi \leq \frac{\pi^2+3}{4}\pi < 4\pi$$

$$\therefore 0 < 4\pi - \left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{13}{4}\pi \leq \pi$$

であるから、①を解くと、

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \cos\left\{4\pi - \left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi\right)\right\}$$

$$\therefore \theta = -\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{13}{4}\pi$$

となる。

以上[1]から[4]より、

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi & (0 \leq a < 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{5}{4}\pi & (1 \leq a < \sqrt{5} \text{ のとき}) \\ \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{5}{4}\pi & (\sqrt{5} \leq a < 3 \text{ のとき}) \\ -\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{13}{4}\pi & (3 \leq a \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4}a^2 + \frac{3}{4}\pi & (0 \leq a < 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{5}{4}\pi & (1 \leq a < \sqrt{5} \text{ のとき}) \\ \frac{\pi}{4}a^2 - \frac{5}{4}\pi & (\sqrt{5} \leq a < 3 \text{ のとき}) \\ -\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{13}{4}\pi & (3 \leq a \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

(1)と同様にして、与えられた不等式の第3式を変形すると、

$$\cos y \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{3}{4}\pi\right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、(1)と同様の場合分けを考える。

[1] $0 \leq x < 1$ のとき

$$\frac{3}{4}\pi \leq \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{3}{4}\pi < \pi$$

であるから、 $\cos y$ が $0 \leq y \leq \pi$ で単調減少であることに注意して②を解くと、

$0 \leq y \leq \pi$ であることを考慮して

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{3}{4}\pi$$

となる。

[2] $1 \leq x < \sqrt{5}$ のとき

$$0 < 2\pi - \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{5}{4}\pi \leq \pi$$

であるから、[1]と同様に②を解くと

$$\cos y \geq \cos\left(-\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\therefore 0 \leq y \leq -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{5}{4}\pi$$

となる。

[3] $\sqrt{5} \leq x < 3$ のとき

$$0 \leq \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{3}{4}\pi\right) - 2\pi = \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{5}{4}\pi < \pi$$

であるから、同様に②を解くと

$$\cos y \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}x^2 - \frac{5}{4}\pi\right)$$

$$\therefore 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}x^2 - \frac{5}{4}\pi$$

となる。

[4] $3 \leq x \leq \pi$ のとき

$$0 < 4\pi - \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{13}{4}\pi \leq \pi$$

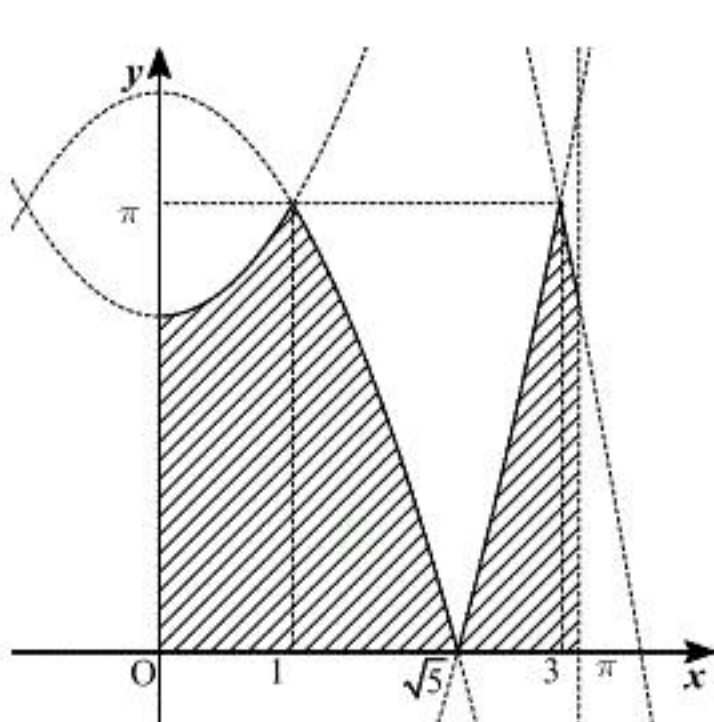
であるから、同様に②を解くと

$$\cos y \geq \cos\left(-\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{13}{4}\pi\right)$$

$$\therefore 0 \leq y \leq -\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{13}{4}\pi$$

となる。

以上[1]から[4]より、求める領域を図示すると以下ようになる。



(答) 前図(ただし、境界を含む)

[3]

(1)

問題文より、点 P の座標を t で表すと

$$(-4+t, 0, 0) = (t-4, 0, 0)$$

となる。一方、直線 ℓ はベクトル

$$(\sqrt{3}, 1, 1) - (0, 0, 1) = (\sqrt{3}, 1, 0)$$

に平行であり、このベクトルの大きさは

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

であるから、点 Q の座標を t で表すと

$$(0, 0, 1) + t(\sqrt{3}, 1, 0) = (\sqrt{3}t, t, 1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(t-4, 0, 0), \quad Q(\sqrt{3}t, t, 1)$$

(2)

(1)の結果より、

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = (t-4)^2$$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = (\sqrt{3}t)^2 + t^2 + 1^2 = 4t^2 + 1$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (t-4) \cdot \sqrt{3}t$$

である。したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(t-4)^2 (4t^2 + 1) - (t-4)^2 \cdot 3t^2} \\ &= \frac{1}{2} |t-4| \sqrt{t^2 + 1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} |t-4| \sqrt{t^2 + 1}$$

(3)

$f(t) = (t-4)^2 (t^2 + 1)$ とおくと、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{f(t)}$$

と書けるから、 $f(t)$ が最大・最小となるとき、 S も最大・最小となる。このとき、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2(t-4)(t^2 + 1) + (t-4)^2 \cdot 2t \\ &= 2(t-4)(2t^2 - 4t + 1) \\ &= 4(t-4) \left(t - \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right) \left(t - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	-0.33	...	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	...	2.6
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

ここで、

$$\begin{aligned} f(-0.33) &= (-0.33-4)^2 \{(-0.33)^2 + 1\} \\ &= 18.7489 \times 1.1089 \\ &> 18.74 \times 1.1 \\ &> 20.6 \\ f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) &= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 4\right)^2 \left\{ \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 \right\} \\ &= \frac{71}{4} + 2\sqrt{2} \\ &< \frac{71}{4} + 2 \times 1.42 \\ &< 20.59 \end{aligned}$$

であるから、 $t = -0.33$ で $f(t)$ は最大となる。一方、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) &= \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} - 4\right)^2 \left\{ \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 \right\} \\ &= \frac{71}{4} - 2\sqrt{2} \\ &< \frac{71}{4} - 2 \times 1.41 \\ &< 14.93 \\ f(2.6) &= (2.6-4)^2 \{(2.6)^2 + 1\} \\ &= 1.96 \times 7.76 \\ &> 15.2 \end{aligned}$$

であるから、 $t = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ で $f(t)$ は最小となる。以上より、 S は $t = -0.33$ のときに最大値

$$\frac{1}{2} |-0.33-4| \sqrt{(-0.33)^2 + 1} = \frac{433\sqrt{11089}}{20000}$$

をとり、 $t = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ のときに最小値

$$\frac{1}{2} \left| \frac{2-\sqrt{2}}{2} - 4 \right| \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{(1+3\sqrt{2})\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{4}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad t = -0.33 \text{ のときに最大値 } \frac{433\sqrt{11089}}{20000}, \quad t = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ のときに最小値 } \frac{(1+3\sqrt{2})\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{4}$$

[4]

(1)

問題文より、 $P_1 = p$ である。2時間後にバクテリアが全滅している確率 $(1 - P_2)$ を考えると、これは1時間後にバクテリアが全滅する確率と、1時間後にバクテリアが2個とも生き残るが、その後の1時間で全滅する確率の和であるから、

$$\begin{aligned} 1 - P_2 &= (1 - p) + p(1 - p)^2 \\ \Leftrightarrow P_2 &= -p^3 + 2p^2 \end{aligned}$$

となる。一方、3時間後にバクテリアが全滅している確率 $(1 - P_3)$ を考えると、これは1時間後にバクテリアが全滅する確率と、1時間後にバクテリアが2個とも生き残るが、その後の2時間で全滅する確率の和であるから、

$$\begin{aligned} 1 - P_3 &= (1 - p) + p(1 - P_2)^2 \\ \therefore P_3 &= p^3(-p + 2)(p^3 - 2p^2 + 2) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_2 = -p^3 + 2p^2, P_3 = p^3(-p + 2)(p^3 - 2p^2 + 2)$$

(2)

(1)と同様に考えると、 $(n + 1)$ 時間後にバクテリアが全滅している確率 $(1 - P_{n+1})$ は、1時間後にバクテリアが全滅する確率と、1時間後にバクテリアが2個とも生き残るが、その後の n 時間で全滅する確率の和であるから、

$$\begin{aligned} 1 - P_{n+1} &= (1 - p) + p(1 - P_n)^2 \\ \therefore P_{n+1} &= -p(P_n^2 - 2P_n) \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad P_{n+1} = -p(P_n^2 - 2P_n)$$

(3)

p は分裂したバクテリアがともに生存する確率であるから、 $0 \leq p \leq 1$ を満たす。(2)の結果を変形すると、

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= -p(P_n^2 - 2P_n) \\ &= p - p(P_n - 1)^2 \end{aligned}$$

となるから、 $0 \leq P_1 = p \leq p$ より帰納的に $0 \leq P_n \leq p$ となる。一方、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} P_n &= -p \cdot P_{n-1}^2 + 2p \cdot P_{n-1} \\ &\leq 2p \cdot P_{n-1} \\ &\leq \cdots \\ &\leq (2p)^{n-1} P_1 \end{aligned}$$

である。したがって、 $p = \frac{1}{3}$ を代入して整理すると、 P_n は不等式

$$0 \leq P_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}$$

を満たす。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$$

(4)

(3)の過程より $0 \leq P_n \leq p$ であるから、 $p = \frac{a-1}{a}$ を代入すると、すべての自然数 n に対して

$$\begin{aligned} P_n &\leq \frac{a-1}{a} \\ \Leftrightarrow P_n - \frac{a-2}{a-1} &\leq \frac{a-1}{a} - \frac{a-2}{a-1} = \frac{1}{a(a-1)} \\ \therefore Q_n &\leq \frac{1}{a(a-1)} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $Q_n > 0$ が成り立つことを数学的帰納法を利用して示す。

[1] $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{a-1}{a} - \frac{a-2}{a-1} \\ &= \frac{1}{a(a-1)} \\ &> 0 \quad (\because a > 2) \end{aligned}$$

であるから、 $n = 1$ のとき $Q_1 > 0$ である。

[2] $n = k$ のとき

$Q_k > 0$ が成り立つことを仮定する。(2)の結果を利用し、 Q_{k+1} を Q_k で表すと、

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= P_{k+1} - \frac{a-2}{a-1} \\ &= -\frac{a-1}{a}(P_k^2 - 2P_k) - \frac{a-2}{a-1} \\ &= -\frac{a-1}{a} \left\{ \left(Q_k + \frac{a-2}{a-1} \right)^2 - 2 \left(Q_k + \frac{a-2}{a-1} \right) \right\} - \frac{a-2}{a-1} \\ &= -\frac{a-1}{a} \left\{ Q_k^2 - \frac{2}{a-1} Q_k - \frac{a(a-2)}{(a-1)^2} \right\} - \frac{a-2}{a-1} \\ &= \frac{2}{a} Q_k - \frac{a-1}{a} Q_k^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $Q_k \leq \frac{1}{a(a-1)}$ を利用すると、

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} Q_k - \frac{a-1}{a} Q_k^2 &\geq \frac{2}{a} Q_k - \frac{a-1}{a} Q_k \cdot \frac{1}{a(a-1)} \\ &= \frac{2a-1}{a^2} Q_k \\ &> 0 \quad (\because a > 2, Q_k > 0) \end{aligned}$$

となるから、 $Q_k > 0$ が成り立つとき $Q_{k+1} > 0$ も成り立つ。

以上[1],[2]より、全ての自然数 n に対して $Q_n > 0$ となることが示された。したがって、

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \frac{2}{a} Q_n - \frac{a-1}{a} Q_n^2 \\ &< \frac{2}{a} Q_n \\ &< Q_n \quad (\because a > 2, Q_n > 0) \end{aligned}$$

であるから、

$$0 < Q_{n+1} < Q_n$$

となる。

(証明終)

(5)

(4)の過程より、 $n \geq 2$ に対して

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{2}{a} Q_{n-1} - \frac{a-1}{a} Q_{n-1}^2 \\ &< \frac{2}{a} Q_{n-1} \\ &< \cdots \\ &< \left(\frac{2}{a}\right)^{n-1} Q_1 \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{a(a-1)} \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$0 < Q_n < \left(\frac{2}{a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{a(a-1)}$$

となる。ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{a}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{a(a-1)} = 0$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(P_n - \frac{a-2}{a-1} \right) &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} P_n &= \frac{a-2}{a-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \frac{a-2}{a-1}$$