

平成 27 年 度

数 学

問 題 冊 子

[1] $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とし, a, b, c は実数とする. $y = f(x)$ によって表される曲線を C とおく. C は x 軸と点 $(-1, 0)$ でのみ交わるとする. さらに, C の接線で傾きが -1 のものがただ一つ存在するとし, それを ℓ とする.

- (1) $f'(-1) > 0$ となることを示せ.
- (2) a の値の範囲を求めよ.
- (3) C と ℓ の接点の x 座標が 1 であるとき, C と ℓ と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ.

[2] (1) a は実数で $0 \leq a \leq \pi$ とする.

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \cos \theta = 0$$

を満たす θ を求めよ.

- (2) 連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}\right) + \cos y \geq 0$$

によって表される xy 平面上の領域を図示せよ.

[3] xyz 空間の原点を O とし, 点 $(0, 0, 1)$ と点 $(\sqrt{3}, 1, 1)$ を通る直線を ℓ とする. 点 P は, 時刻 $t = 0$ のとき $(-4, 0, 0)$ にあって, x 軸上を正の向きに速さ 1 で動いている. 点 Q は, $t = 0$ のとき $(0, 0, 1)$ にあって, 直線 ℓ 上を x 座標が増えるように速さ 2 で動いている.

- (1) 点 P, Q の座標を t の式で表せ.
- (2) 三角形 OPQ の面積 S を t の式で表せ.
- (3) $-0.33 \leq t \leq 2.6$ のときの S の最大値と最小値, およびそれらをとる t の値を求めよ.

[4] あるバクテリアをある条件の下で培養した場合、生存している 1 個が、1 時間後には 1 回分裂して 2 個ともに生存しているか、あるいは死滅しているかであり、2 個とも生存している確率が p 、死滅している確率が $1 - p$ であるという。このバクテリアがこの条件の下で最初 1 個生存していたとき、 n 時間後に 1 個以上生存している確率を P_n とおく。ただし、 n は自然数とする。

(1) P_2, P_3 をそれぞれ p の式で表せ。

(2) P_{n+1} を p と P_n の式で表せ。

(3) $p = \frac{1}{3}$ のときの $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ を求めよ。

(4) a を 2 より大きな実数とする。 $p = \frac{a-1}{a}$, $Q_n = P_n - \frac{a-2}{a-1}$ としたとき、
 $0 < Q_{n+1} < Q_n$ であることを示せ。

(5) p が (4) と同じときの $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ を求めよ。

