

[1]

(1)

5以下の異なる3個の自然数の総和として表される自然数のうち、最小のものは

$$1+2+3=6$$

であり、最大のものは

$$3+4+5=12$$

である。また、

$$1+2+4=7$$

$$1+2+5=8$$

$$1+3+5=9$$

$$1+4+5=10$$

$$2+4+5=11$$

であるから、6と12の間の自然数も表すことが出来る。以上より、5以下の異なる3個の自然数の総和として表される自然数は7個である。

(答) 7 個

(2)

条件を満たすような $a_1, a_2, \dots, a_m$ を取るとき、 $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ のうち、最小のものは

$$1+2+\dots+m$$

であり、最大のものは

$$(n-m+1)+(n-m+2)+\dots+n$$

である。このとき、大小関係においてこの2つの自然数の間にあるような任意の自然数について、対応する $a_1, a_2, \dots, a_m$ の選び方が存在することを示す。

$$\begin{aligned} & \{(n-m+1)+(n-m+2)+\dots+n\} - (1+2+\dots+m) \\ &= m(n-m) \end{aligned}$$

であるから、1以上 $m(n-m)$ 未満の任意の自然数 Δ を用いて、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_m = 1+2+\dots+m+\Delta$$

と表せることを示す。このとき、整数 s, t を用いて、 Δ を $n-m$ で割った商を s 、余りを t とすると、

$$\Delta = (n-m) \cdot s + t$$

であり、 $0 \leq s \leq m, 0 \leq t \leq n-m-1$ を満たす。また、自然数 k ($1 \leq k \leq m$) を用いて、

$$b_k = 0 \quad (1 \leq k \leq m-s-1 \text{ のとき})$$

$$b_k = t \quad (k = m-s \text{ のとき})$$

$$b_k = n-m \quad (m-s+1 \leq k \leq m \text{ のとき})$$

と定義すると、

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_m \leq n-m \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。このとき、各 k に対して

$$a_k = k + b_k$$

と定義し、①に辺々

$$1 \leq 1 < 2 < \dots < m \leq m$$

を足すと、

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq n$$

であることが分かる。よって、

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \dots + a_m \\ &= 1+2+\dots+m + b_1 + b_2 + \dots + b_m \\ &= 1+2+\dots+m + \sum_{k=1}^{m-s-1} b_k + b_{m-s} + \sum_{k=m-s+1}^m b_k \\ &= 1+2+\dots+m + \sum_{k=1}^{m-s-1} 0 + t + \sum_{k=m-s+1}^m (n-m) \\ &= 1+2+\dots+m + 0 + t + s(n-m) \\ &= 1+2+\dots+m + \Delta \end{aligned}$$

である。 Δ は1以上 $m(n-m)$ 未満の任意の自然数であるから、 $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ は $1+2+\dots+m$ より大きく $(n-m+1)+(n-m+2)+\dots+n$ 未満である任意の自然数を表すことが出来る、ということが分かる。以上より、条件を満たすような $a_1, a_2, \dots, a_m$ を取るとき、 $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ が表せる自然数は、

$$\begin{aligned} & (n-m+1)+(n-m+2)+\dots+n - (1+2+\dots+m) + 1 \\ &= m(n-m) + 1 \end{aligned}$$

より、 $m(n-m)+1$ (個) である。

(答) $m(n-m)+1$ (個)

[2]

直線 ℓ の式は,

$$y = a(x-2) - 2$$

であるから、放物線 $y = x^2$ との共有点の x 座標は、 y を消去して、

$$x^2 - ax + 2a + 2 = 0$$

の実数解である。この 2 次方程式の判別式を D とすると、直線 ℓ と放物線 $y = x^2$ が交わらない条件は、

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 4(a+2) &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 8a + 8 &< 0 \\ \Leftrightarrow \{a - (4+2\sqrt{6})\} \{a - (4-2\sqrt{6})\} &< 0 \\ \Leftrightarrow 4-2\sqrt{6} < a < 4+2\sqrt{6} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$4-2\sqrt{6} < a \Leftrightarrow t^3 + 2(2+\sqrt{6})t^2 + 3(1+2\sqrt{6})t + 4\sqrt{6} > 0$$

である。

$$f(t) = t^3 + 2(2+\sqrt{6})t^2 + 3(1+2\sqrt{6})t + 4\sqrt{6}$$

とおく。 $f(-1) = 0$ であることに気を付けると、

$$f(t) = (t+1)\{t^2 + (3+2\sqrt{6})t + 4\sqrt{6}\}$$

であり、

$$\begin{aligned} t^2 + (3+2\sqrt{6})t + 4\sqrt{6} &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-3-2\sqrt{6} \pm \sqrt{(3+2\sqrt{6})^2 - 4 \cdot 4\sqrt{6}}}{2} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{-3-2\sqrt{6} \pm \sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\alpha = \frac{-3-2\sqrt{6}-\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2}, \beta = \frac{-3-2\sqrt{6}+\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2}$$

とおくと、

$$f(t) = (t+1)(t-\alpha)(t-\beta)$$

と表せる。ここで、 $\sqrt{6} > 2$ であるから、 β について

$$\begin{aligned} \frac{-3-2\sqrt{6}+\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2} &< \frac{-3-4+\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2} \\ &< \frac{-7+\sqrt{33-8}}{2} \\ &= \frac{-7+5}{2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。よって、

$$f(t) > 0 \Leftrightarrow \alpha < t < \beta \text{ または } -1 < t \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} a &< 4+2\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow t^3 + 2(2+\sqrt{6})t^2 + 3(1+2\sqrt{6})t &< 0 \\ \Leftrightarrow t\{t^2 + 2(2+\sqrt{6})t + 3(1+2\sqrt{6})\} &< 0 \\ \Leftrightarrow t(t+3)(t+1+2\sqrt{6}) &< 0 \end{aligned}$$

であり、 $1+2\sqrt{6} > 3$ であるから、

$$a < 4+2\sqrt{6} \Leftrightarrow t < -1-2\sqrt{6} \text{ または } -3 < t < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} 2.5^2 &= 6.25 > 6 \\ \therefore \sqrt{6} &< 2.5 \end{aligned}$$

であるから、 α について

$$\begin{aligned} \frac{-3-2\sqrt{6}-\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2} &< \frac{-3-2\sqrt{6}-\sqrt{33-4 \cdot 3}}{2} \\ &= \frac{-3-2\sqrt{6}-\sqrt{21}}{2} \\ &< \frac{-3-2\sqrt{6}-4}{2} \left(\because 4 < \sqrt{21} \right) \\ &= \frac{-2-5-2\sqrt{6}}{2} \\ &< \frac{-2-2\sqrt{6}-2\sqrt{6}}{2} \\ &= -1-2\sqrt{6} \end{aligned}$$

であり、 β について

$$\begin{aligned} \frac{-3-2\sqrt{6}+\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2} &> \frac{-3-2\sqrt{6}+\sqrt{33-4 \cdot 3}}{2} \\ &> \frac{-3-2 \cdot 3+\sqrt{21}}{2} \\ &> \frac{-9+4}{2} \\ &= -\frac{5}{2} \\ &> -3 \end{aligned}$$

であるから、①と②より条件を満たす t の範囲は、

$$\begin{aligned} \frac{-3-2\sqrt{6}-\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2} &< t < -1-2\sqrt{6}, \\ -3 < t < \frac{-3-2\sqrt{6}+\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2}, &-1 < t < 0 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{-3-2\sqrt{6}-\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2} < t < -1-2\sqrt{6}, -3 < t < \frac{-3-2\sqrt{6}+\sqrt{33-4\sqrt{6}}}{2}, -1 < t < 0$$

[3]

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+2} - pa_{n+1} &= q(a_{n+1} - pa_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+2} &= (p+q)a_{n+1} - pqa_n \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} p+q=1 \\ -pq=6 \end{cases}$$

が得られる。ここで、解と係数の関係より、 p, q は2次方程式

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-3) = 0$$

の解、 $x = -2, 3$ のいずれかに等しいから,

$$(p, q) = (3, -2), (-2, 3)$$

である。また、 $a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ のとき、数列 $\{a_{n+1} - pa_n\}$ は初項 $a_2 - pa_1$ 、公比 q の等比数列であるから、

$$a_{n+1} - pa_n = q^{n-1}(a_2 - pa_1)$$

である。したがって、 $(p, q) = (3, -2), (-2, 3)$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{n+1} - 3a_n = (-2)^{n-1} \cdot (1 - 3 \cdot 1) \\ a_{n+1} + 2a_n = 3^{n-1} \cdot (1 + 2 \cdot 1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5}$$

(2)

(1)で求めた式に従って計算すると、

$$\begin{aligned} & a_{m+1}a_{n+1} + 6a_ma_n \\ &= \frac{3^{m+1} - (-2)^{m+1}}{5} \cdot \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1}}{5} + 6 \cdot \frac{3^m - (-2)^m}{5} \cdot \frac{3^n - (-2)^n}{5} \\ &= \frac{3^{m+n+2} - 3^{m+1} \cdot (-2)^{n+1} - 3^{n+1} \cdot (-2)^{m+1} + (-2)^{m+n+2}}{25} \\ & \quad + \frac{2 \cdot 3^{m+n+1} + 3^{m+1} \cdot (-2)^{n+1} + 3^{n+1} \cdot (-2)^{m+1} - 3 \cdot (-2)^{m+n+1}}{25} \\ &= \frac{3^{m+n+2} + 2 \cdot 3^{m+n+1} + (-2)^{m+n+2} - 3 \cdot (-2)^{m+n+1}}{25} \\ &= \frac{5 \cdot 3^{m+n+1} - 5 \cdot (-2)^{m+n+1}}{25} \\ &= \frac{3^{m+n+1} - (-2)^{m+n+1}}{5} \\ &= a_{m+n+1} \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)

自然数 m が n で割り切れるとき、自然数 k を用いて、 $m = nk$ と表せる。このとき、

$$s = 3^n, t = (-2)^n \text{ とすると、}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{a_n} &= \frac{3^m - (-2)^m}{3^n - (-2)^n} \\ &= \frac{s^k - t^k}{s - t} \\ &= s^{k-1} + s^{k-2}t + \cdots + st^{k-2} + t^{k-1} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq l \leq k-1$ を満たす自然数 l に対して $s^l t^{k-1-l}$ は整数だから、 $\frac{a_m}{a_n}$ も整数である。これは、 a_m が a_n で割り切れることを意味する。

(証明終)

(4)

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + 6a_1 = 7 \\ a_4 &= a_3 + 6a_2 = 13 \\ a_5 &= a_4 + 6a_3 = 55 \\ a_6 &= a_5 + 6a_4 = 133 \\ a_7 &= a_6 + 6a_5 = 463 \end{aligned}$$

である。(2)より、 $12 = 6 + 5 + 1$ であるから、

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_7 a_6 + 6a_5 a_4 \\ &= 463 \cdot 133 + 6 \cdot 133 \cdot 55 \\ &= 133 \cdot 793 \end{aligned}$$

である。また、(3)より、6 は3で割り切れるから、 $a_6 = 133$ は $a_3 = 7$ で割り切れる。ゆえに、

$$793 = 13 \cdot 61 \text{ であるから、}$$

$$a_{12} = 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 61$$

である。

$$(答) \quad a_{12} = 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 61$$

[4]

(1)

$z = \alpha$ のとき, $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ は純虚数ではない。 $z = \beta$ のとき, $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ は定義されない。よって, 以下 z

は α, β でないとする。この条件のもと $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ が純虚数となる為の必要十分条件は,

$$\begin{aligned} \frac{z-\alpha}{z-\beta} + \overline{\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)} &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-\alpha)(\overline{z-\beta}) + (\overline{z-\alpha})(z-\beta) &= 0 \\ \Leftrightarrow z\bar{z} - \frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{2}z - \frac{\alpha+\beta}{2}\bar{z} + \frac{\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\overline{\left(z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} &= \frac{\alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}}{4} \\ \Leftrightarrow \left(z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\overline{\left(z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)} &= \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\overline{\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \left|z - \frac{\alpha+\beta}{2}\right| &= \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \end{aligned}$$

である。したがって, z の描く図形は, 点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ を中心とする半径 $\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|$ の円(ただし, 2 点 α, β を除く)である。

(答) 前述

(2)

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

である。 α の虚部は正だから,

$$(\alpha, \beta) = (1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i)$$

である。このとき,

$$(1 + \sqrt{3}i)^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

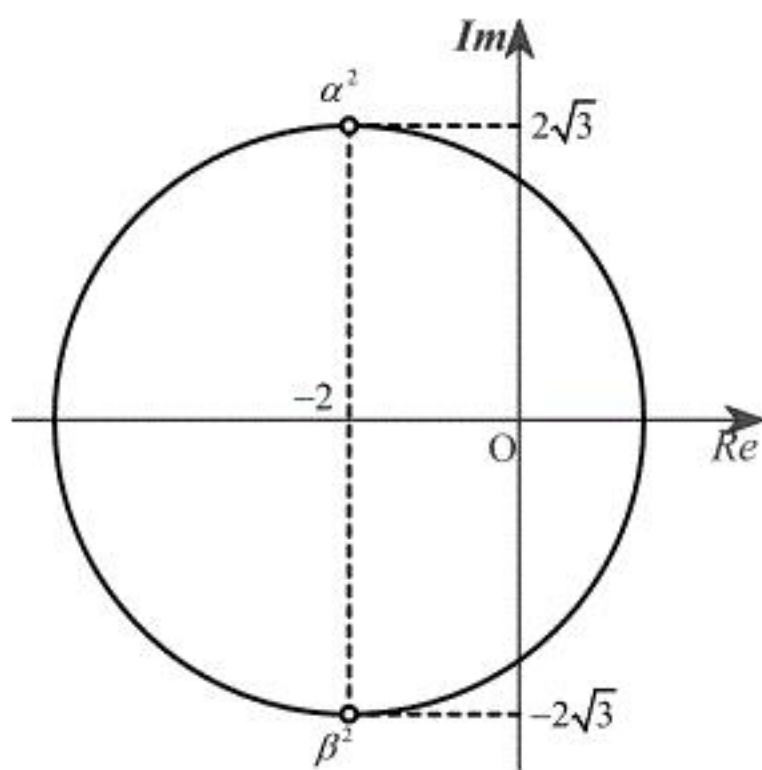
$$(1 - \sqrt{3}i)^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

であるから,

$$(\alpha^2, \beta^2) = (-2 + 2\sqrt{3}i, -2 - 2\sqrt{3}i)$$

である。ここで, $\arg \frac{z-\alpha^2}{z-\beta^2} = \frac{\pi}{2}$ より, $\frac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}$ は純虚数である。よって, (1)より, $\frac{z-\alpha^2}{z-\beta^2}$ が純虚

数となるような z の描く図形は, 点 -2 を中心とする半径 $2\sqrt{3}$ の円(ただし, 2 点 $-2 \pm 2\sqrt{3}i$ を除く)である。これを図示すると, 下図の通りである。

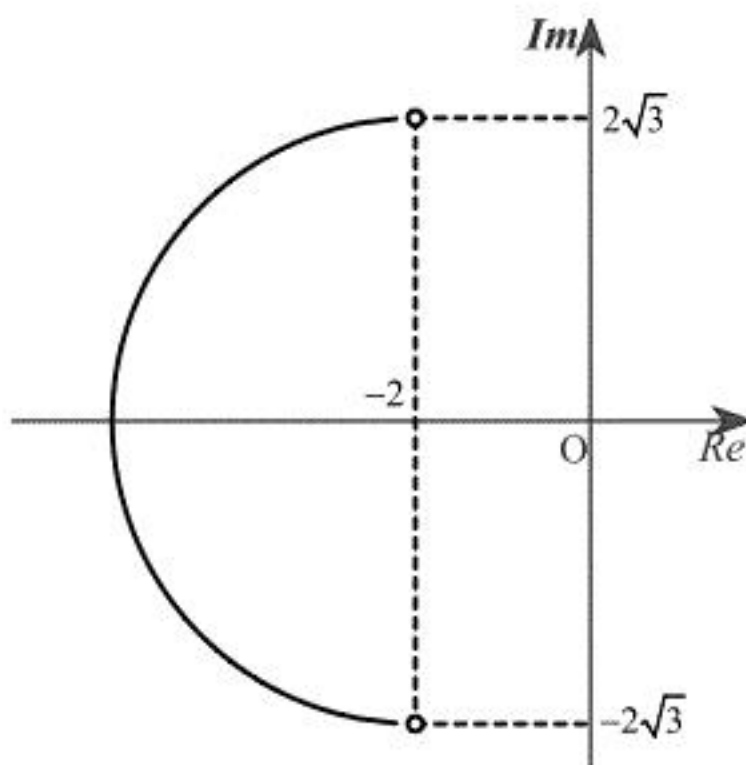


このうち, 偏角の定義より,

$$(z \text{ の実部}) > -2 \text{ のとき, } \arg \frac{z-\alpha^2}{z-\beta^2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$(z \text{ の実部}) < -2 \text{ のとき, } \arg \frac{z-\alpha^2}{z-\beta^2} = \frac{\pi}{2}$$

である。よって, z が複素数平面上で描く図形は, 上図の円のうち, $(z \text{ の実部}) < -2$ の部分である。以上より, これを図示すると, 下図の通りである(ただし, 2 点 $-2 \pm 2\sqrt{3}i$ を除く)。



(答) 前図