

平成 28 年 度

数 学

問 題 冊 子

[1] (1) 5 以下の異なる 3 個の自然数の総和として表される自然数は何個あるか.

(2) 自然数 m, n を $m < n$ のようにとる. m 個の自然数 $a_1, a_2, \dots, a_m$ を

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq n$$

のようにとり, 和 $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ を考える. この形で表される自然数は何個あるか.

[2] t を実数とし, $a = t^3 + 2(2 + \sqrt{6})t^2 + 3(1 + 2\sqrt{6})t + 2(2 + \sqrt{6})$ とする. 点 $(2, -2)$ を通り, 傾き a の直線を ℓ とする. ℓ と放物線 $y = x^2$ が交わらない t の範囲を求めよ.

[3] 自然数の数列 $\{a_n\}$ を次のように定める.

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対し, $a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ をみたすような数 p, q を求めることにより, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 自然数 m, n に対し, $a_{m+n+1} = a_{m+1}a_{n+1} + 6a_ma_n$ が成り立つことを証明せよ.

(3) 自然数 m, n に対し, m が n で割り切れるとき, a_m は a_n で割り切れることを証明せよ.

(4) a_{12} を素因数分解せよ.

[4] (1) 異なる複素数 α, β に対して, $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ が純虚数となるような z は, 複素数平面上でどのような図形を描くか.

(2) 2次方程式 $x^2 - 2x + 4 = 0$ の解を α, β とする. ただし, α の虚部は正であるとする. 等式

$$\arg \frac{z-\alpha^2}{z-\beta^2} = \frac{\pi}{2}$$

をみたす z が, 複素数平面上で描く図形を図示せよ.