

[1]

(1)

$P(x)=0$ の3つの解がすべて実数解であると仮定すると、解の絶対値がすべて等しいことから3つのうちある2つの解が等しくなり、 $P(x)=0$ が異なる3つの解を持つことに反する。したがって、 $P(x)=0$ は虚数解をもち、それを $p+qi$ (p, q は実数で、 $q \neq 0$) とおく。ここで、実数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ を用いて実数係数の n 次方程式を $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ ($n \geq 2$) と定義し、 z を $f(x)=0$ の虚数解の1つとすると、

$$\begin{aligned} f(z) &= 0 \\ \Leftrightarrow a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0} &= \overline{0} \\ \Leftrightarrow \overline{a_n}(\overline{z})^n+\overline{a_{n-1}}(\overline{z})^{n-1}+\dots+\overline{a_1}(\overline{z})^1+\overline{a_0} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_n(\overline{z})^n+a_{n-1}(\overline{z})^{n-1}+\dots+a_1(\overline{z})^1+a_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow f(\overline{z}) &= 0 \end{aligned}$$

が得られるから、 $\overline{z}$ も $f(x)=0$ の解である。したがって、 $p-qi$ は $P(x)=0$ の解であり、もう一つの解は α (α は実数) とおける。さらに、 $P(x)$ は2次式 x^2+ax+b で割り切れるから、 $x^2+ax+b=0$ は異なる2つの解をもち、 a, b が実数であることと先の考察よりこの解は $x=p \pm qi$ である。したがって、2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の判別式 D について $D < 0$ より、

$$a^2-4b < 0$$

が得られる。また、このことから $b > \frac{a^2}{4} \geq 0$ が分かる。また、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned} (p+qi)(p-qi) &= b \\ \Leftrightarrow p^2+q^2 &= b \\ \Leftrightarrow |p+qi|^2 &= b \\ \Leftrightarrow |p+qi| &= \sqrt{b} \quad (\because b > 0, |p+qi| > 0) \end{aligned}$$

であるから、 $P(x)=0$ の実数解について、

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \sqrt{b} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \pm \sqrt{b} \end{aligned}$$

である。以上のことと、問題文より $P(x)$ の3次の係数は1であることより、

$$P(x)=(x^2+ax+b)(x \pm \sqrt{b})$$

となる。

$$(答) \quad a^2-4b < 0, \quad P(x)=(x^2+ax+b)(x \pm \sqrt{b})$$

(2)

(1)で示したように、 $5+4i$ が $Q(x)=0$ の解であるとき $5-4i$ も $Q(x)=0$ の解である。複素数平面上で $5+4i, 5-4i$ を通る円の中心は、 $5+4i, 5-4i$ の垂直二等分線、すなわち実軸上にあり、中心を表す実数を β とすると、 -3 が円周上にあるから

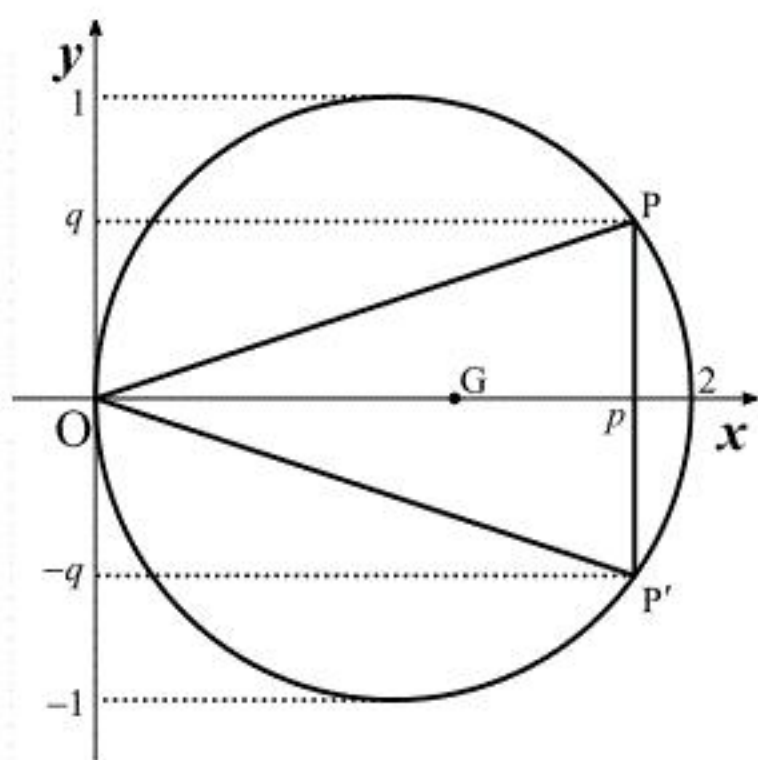
$$\begin{aligned} |-3-\beta| &= |5+4i-\beta| \\ \Leftrightarrow (-3-\beta)^2 &= (5-\beta)^2+4^2 \\ \Leftrightarrow 16\beta &= 32 \\ \Leftrightarrow \beta &= 2 \end{aligned}$$

が得られる。よって、円の半径は5であり $Q(x)=0$ の $5 \pm 4i, -3$ 以外の解は

$$2+5=7$$

である。

$$(答) \quad 5-4i, 7$$



球面 S と xy 平面との交円 C 上の点 P の座標を $(p, q, 0)$ とおくと $P'(p, -q, 0)$ である。ここで、 $\triangle OPP'$ の存在より $0 < p < 2$ である。点 P は S 上にあるから

$$\begin{aligned}(p-1)^2 + q^2 + 0^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow q^2 &= 2p - p^2\end{aligned}$$

が得られる。点 G は $\triangle OPP'$ の重心より、その座標は

$$\left(\frac{p+p}{3}, \frac{q+(-q)}{3}, 0 \right) = \left(\frac{2}{3}p, 0, 0 \right)$$

である。ここで、 G を通り z 軸に平行な直線 ℓ の方程式は $\ell: x = \frac{2}{3}p, y = 0$ であり、 ℓ の $z > 0$

である部分上の点 Q の座標は $\left(\frac{2}{3}p, 0, r \right)$ ($r > 0$) とおける。点 Q は S 上にあるから

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}p - 1 \right)^2 + 0^2 + r^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow r^2 &= \frac{4}{9}p(3-p) \\ \therefore r &= \frac{2}{3}\sqrt{p(3-p)} \quad (\because 0 < p < 2, r > 0)\end{aligned}$$

が得られる。 $\triangle OPP'$ は xy 平面上にあり、 xy 平面と ℓ は垂直であるから $\triangle OPP' \perp \ell$ であり、

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2q \cdot p \right) \cdot r \\ &= \frac{2}{9}pq\sqrt{p(3-p)} \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{p^3(2p-p^2)(3-p)} \\ &= \frac{2}{9}\sqrt{p^6-5p^5+6p^4}\end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $f(p) = p^6 - 5p^5 + 6p^4$ と定義すると

$$\begin{aligned}f'(p) &= 6p^5 - 25p^4 + 24p^3 \\ &= p^3(2p-3)(3p-8)\end{aligned}$$

であり、次のような増減表がかけらる。

p	0	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$f'(p)$		+	0	-	
$f(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、 $f(p)$ は $p = \frac{3}{2}$ で最大となり、 V も $p = \frac{3}{2}$ で最大値をとる。このときの点 P の座

標は $\left(\frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ であり、 V の最大値は

$$\frac{2}{9}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 5\left(\frac{3}{2}\right)^5 + 6\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。

(答) $P \left(\frac{3}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ のとき、最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

[3]

$f(x)=ax^2+bx+6$ とおく。 $f(x)=0$ は整数の解を少なくとも1つ持ち、これを α とし、もう1解を β (β は実数) とおく。 解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\frac{b}{a} & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta=\frac{6}{a} & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が得られる。 $a>0, b>0$ に注意すると、 $\textcircled{2}$ より α, β は同符号であり、 $\textcircled{1}$ より α, β はいずれも負の値である。 また、 $f(x)=0$ は絶対値が1より小さな解をもたないから、 $\alpha \leq -1, \beta \leq -1$ となる。 したがって、 $\textcircled{2}$ より

$$\frac{6}{a\alpha} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow a\alpha \geq -6$$

が得られる。 a は自然数で、 α は負の整数であることに注意すると

$$(a, \alpha) = (1, -1), (1, -2), (1, -3), (1, -4), (1, -5), (1, -6), (2, -1), (2, -2), (2, -3), (3, -1), (3, -2), (4, -1), (5, -1), (6, -1)$$

の組み合わせが考えられる。 以下、それぞれを検討する。 なお、それぞれにおいて b は $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ より得られる式

$$b=-a(\alpha+\beta)=-a\left(\alpha+\frac{6}{a\alpha}\right)$$

により計算される。

[1] $(a, \alpha)=(1, -1)$ のとき

$b=7$ であるから、

$$p=n^2+7n+6=(n+1)(n+6)$$
と表される。 p は素数だから $n+1=\pm 1$ または $n+6=\pm 1$ が必要であるが、いずれの場合も p を素数にする整数 n は存在しない。

[2] $(a, \alpha)=(1, -2)$ のとき

$b=5$ であるから、

$$p=n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$$
と表される。 p は素数だから $n+2=\pm 1$ または $n+3=\pm 1$ が必要であるが、 p を素数にする整数 n は $n=-4, -1$ であり、このとき $p=2$ である。

[3] $(a, \alpha)=(1, -3)$ のとき

$b=5$ であるから、

$$p=n^2+5n+6=(n+2)(n+3)$$
と表される。 p は素数だから $n+2=\pm 1$ または $n+3=\pm 1$ が必要であるが、 p を素数にする整数 n は $n=-4, -1$ であり、このとき $p=2$ である。

[4] $(a, \alpha)=(1, -4)$ のとき

$b=\frac{11}{2}$ であるから、 b が自然数であることに反する。

[5] $(a, \alpha)=(1, -5)$ のとき

$b=\frac{31}{5}$ であるから、 b が自然数であることに反する。

[6] $(a, \alpha)=(1, -6)$ のとき

$b=7$ であるから、

$$p=n^2+7n+6=(n+1)(n+6)$$
と表される。 p は素数だから $n+1=\pm 1$ または $n+6=\pm 1$ が必要であるが、いずれの場合も p を素数にする整数 n は存在しない。

[7] $(a, \alpha)=(2, -1)$ のとき

$b=8$ であるから、

$$p=2n^2+8n+6=2(n+1)(n+3)$$
と表される。 p は素数だから $n+1=\pm 1$ または $n+3=\pm 1$ が必要であるが、いずれの場合も p を素数にする整数 n は存在しない。

[8] $(a, \alpha)=(2, -2)$ のとき

$b=7$ であるから、

$$p=2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$$
と表される。 p は素数だから $n+2=\pm 1$ または $2n+3=\pm 1$ が必要であるが、 p を素数にする整数 n は $n=-3$ であり、このとき $p=3$ である。

[9] $(a, \alpha)=(2, -3)$ のとき

$b=8$ であるから、

$$p=2n^2+8n+6=2(n+1)(n+3)$$
と表される。 p は素数だから $n+1=\pm 1$ または $n+3=\pm 1$ が必要であるが、いずれの場合も p を素数にする整数 n は存在しない。

[10] $(a, \alpha)=(3, -1)$ のとき

$b=9$ であるから、

$$p=3n^2+9n+6=3(n+1)(n+2)$$
と表される。 p は素数だから $n+1=\pm 1$ または $n+2=\pm 1$ が必要であるが、いずれの場合も p を素数にする整数 n は存在しない。

[11] $(a, \alpha)=(3, -2)$ のとき

$b=9$ であるから、

$$p=3n^2+9n+6=3(n+1)(n+2)$$
と表される。 p は素数だから $n+1=\pm 1$ または $n+2=\pm 1$ が必要であるが、いずれの場合も p を素数にする整数 n は存在しない。

[12] $(a, \alpha)=(4, -1)$ のとき

$b=10$ であるから、

$$p=4n^2+10n+6=2(n+1)(2n+3)$$
と表される。 p は素数だから $n+1=\pm 1$ または $2n+3=\pm 1$ が必要であるが、 p を素数にする整数 n は $n=-2$ であり、このとき $p=2$ である。

[13] $(a, \alpha)=(5, -1)$ のとき

$b=11$ であるから、

$$p=5n^2+11n+6=(n+1)(5n+6)$$
と表される。 p は素数だから $n+1=\pm 1$ または $5n+6=\pm 1$ が必要であるが、いずれの場合も p を素数にする整数 n は存在しない。

[14] $(a, \alpha)=(6, -1)$ のとき

$b=12$ であるから、

$$p=6n^2+12n+6=6(n+1)^2$$
と表される。 これは整数 n によらず p が6の倍数であることを示すから、 p を素数にする整数 n は存在しない。

以上より、題意を満たす自然数の組 (a, b, p) は

$$(a, b, p) = (1, 5, 2), (2, 7, 3), (4, 10, 2)$$

である。

(答) $(a, b, p) = (1, 5, 2), (2, 7, 3), (4, 10, 2)$

[4]

(1)

点 P が y 軸上にある, すなわち $-1 + \cos t = 0$ のとき, $0 \leq t \leq \pi$ に注意すると $t = 0$ であり, このとき点 P は原点 O に一致するから, 3 点 O, P, Q は一直線上にある。また, 点 Q が y 軸上にある, すなわち $1 + \cos 3t = 0$ のとき, $0 \leq t \leq \pi$ に注意すると $t = \frac{\pi}{3}, \pi$ であり, このとき点 Q は原点 O に一致するから, 3 点 O, P, Q は一直線上にある。点 P と点 Q がいずれも y 軸上にない, すなわち $t \neq 0, \frac{\pi}{3}, \pi$ のとき, 2 直線 OP, OQ は原点 O を共有するから 3 点 O, P, Q が一直線上にある条件は 2 直線 OP, OQ の傾きが等しいことである。その条件は

$$\begin{aligned}\frac{\sin t}{-1 + \cos t} &= \frac{\sin 3t}{1 + \cos 3t} \\ \Leftrightarrow \sin t (1 + 4 \cos^3 t - 3 \cos t) &= (4 \sin t \cos^2 t - \sin t) (-1 + \cos t) \\ \Leftrightarrow \sin t \cos t \left(\cos t - \frac{1}{2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos t = 0 \left(\because \sin t \neq 0, \cos t \neq \frac{1}{2} \right) \\ \therefore t &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

である。以上より, 3 点 O, P, Q が一直線上にある条件は $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ である。

(答) $t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$

(2)

(1)より 3 点 O, P, Q が一直線上にないとき $t \neq 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ である。このとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 &= (-1 + \cos t)^2 + \sin^2 t = 2(1 - \cos t) \\ |\overrightarrow{OQ}|^2 &= (1 + \cos 3t)^2 + \sin^2 3t = 2(1 + \cos 3t) = 2(1 + \cos t)(2 \cos t - 1)^2 \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= (-1 + \cos t)(1 + \cos 3t) + \sin t \sin 3t \\ &= -4 \cos^3 t + 2 \cos^2 t + 4 \cos t - 2 \\ &= 2 \sin^2 t (2 \cos t - 1)\end{aligned}$$

である。また, $\cos \angle POQ = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|}$ より,

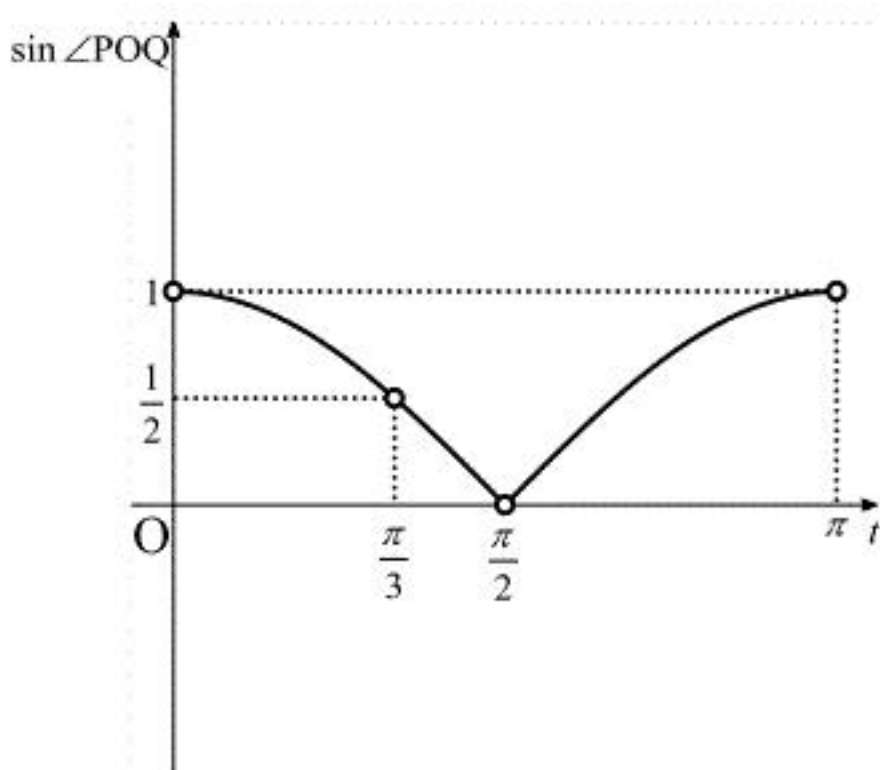
$$\begin{aligned}\sin^2 \angle POQ &= 1 - \cos^2 \angle POQ \\ \Leftrightarrow \sin^2 \angle POQ &= 1 - \frac{(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2}{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \angle POQ &= 1 - \frac{2 \sin^2 t (2 \cos t - 1)^2}{2(1 - \cos t) \cdot 2(1 + \cos t)(2 \cos t - 1)^2} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \angle POQ &= \cos^2 t \\ \therefore \sin \angle POQ &= |\cos t| \quad (\because \sin \angle POQ > 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $|\cos t|$

(3)

(2)より, $\sin \angle POQ = |\cos t|$ であるから, $t \neq 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi$ であることと $\cos t$ のグラフの t 軸より下の部分を t 軸で折り返すことに注意して, $\sin \angle POQ$ のグラフは次のようになる。



(答) 前図

(4)

$\triangle OPQ$ が辺 OP と辺 PQ の長さが等しい二等辺三角形のとき, 頂点 P から辺 OQ に下ろした垂線の足は辺 OQ の中点に一致する。したがって,

$$\begin{aligned}OP \cos \angle POQ &= \frac{1}{2} OQ \\ \therefore |\overrightarrow{OP}|^2 (1 - \sin^2 \angle POQ) &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OQ}|^2 \\ \Leftrightarrow 2(1 - \cos t)(1 - \cos^2 t) &= \frac{1}{4} \{2(1 + \cos t)(2 \cos t - 1)^2\} \\ \Leftrightarrow (1 + \cos t)(3 - 4 \cos t) &= 0 \\ \therefore \cos t &= \frac{3}{4} \left(\because t \neq 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi \right)\end{aligned}$$

が得られる。このとき $\triangle OPQ$ の面積は,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \sin \angle POQ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - \cos t} \cdot 2\sqrt{1 + \cos t} |2 \cos t - 1| |\cos t| \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{4}} \cdot \left| 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 \right| \cdot \left| \frac{3}{4} \right| \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{32}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{3\sqrt{7}}{32}$