

平成 29 年 度

数 学

問 題 冊 子

[1] (1) 実数を係数とする3次の整式 $P(x)$ があり、 $P(x)$ は2次式 $x^2 + ax + b$ で割り切れるとする。また方程式 $P(x) = 0$ は異なる3つの解を持ち、それらの絶対値は等しいとする。このとき、 a, b が満たすべき条件を求め、さらに a, b を用いて $P(x)$ を表せ。ただし、 a, b は実数であるとし、また $P(x)$ の3次の係数は1とする。

(2) 実数を係数とする4次方程式 $Q(x) = 0$ は異なる4つの解を持ち、それらは複素数平面において同一円周上にあるとする。解の2つが $-3, 5 + 4i$ であるとき、他の2つの解を求めよ。ただし、 i は虚数単位である。

[2] O を原点とする座標空間において、中心が点 $(1, 0, 0)$ で半径が1の球面を S とし、 S が xy 平面と交わってできる円を C とする。点 P はこの C 上を動くものとし、 x 軸に関して P と対称な点を P' とする。三角形 OPP' の重心 G を通り z 軸と平行な直線が S と交わる2点のうち、 z 座標が正のものを Q とする。四面体 $OPP'Q$ の体積 V の最大値とそのときの P の座標を求めよ。

[3] a, b, p は自然数であるとする。さらに p は素数であり、ある整数 n で $p = an^2 + bn + 6$ と表されているとする。また2次方程式 $ax^2 + bx + 6 = 0$ は整数の解を少なくとも1つ持ち、かつ絶対値が1より小さな解は持たないとする。このときの自然数の組 (a, b, p) をすべて求めよ。

[4] O を原点とする座標平面に2点 $P(-1 + \cos t, \sin t)$, $Q(1 + \cos 3t, \sin 3t)$ がある。ただし、 $0 \leq t \leq \pi$ とする。

(1) 3点 O, P, Q が一直線上にあるような t をすべて求めよ。

(2) 3点 O, P, Q が一直線上にないとき、 $\cos t$ を用いて $\sin \angle POQ$ を表せ。

(3) (2) と同じ条件の下で、 $\sin \angle POQ$ を t の関数として考えたときのグラフをかけ。

(4) 3点 O, P, Q が一直線上になく、さらに線分 OP と線分 PQ の長さが等しくなるときの三角形 OPQ の面積を求めよ。ただし、そのときの t は求めなくてもよい。