

[1]

(1)

背理法を利用して $\sqrt{2}$ が有理数でないことを示す。すなわち、 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定して矛盾を導く。すると、互いに素な整数 p, q ($p \neq 0$) を用いて、

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$$

と表せる。よって、この両辺を2乗すると、

$$2 = \frac{q^2}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow 2p^2 = q^2 \quad (\because p \neq 0) \quad \dots \textcircled{1}$$

となり、左辺は2の倍数であるから右辺も2の倍数となる。ここで、奇数の2乗は奇数であるから、対偶より q^2 が2の倍数ならば q も2の倍数であり、整数 k を用いて $q = 2k$ と表せる。したがって、これを①に代入すると、

$$2p^2 = (2k)^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 = 2k^2$$

となるから、同様にして p は整数 l を用いて $p = 2l$ と表せる。しかし、このとき p と q は公約数2をもち、これは p, q が互いに素であることに矛盾する。したがって、 $\sqrt{2}$ は有理数ではない。

(証明終)

(2)

有理数がある自然数の平方根となるとき、その有理数を $\frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な自然数, $p \neq 0$)とすると、自然数 n を用いて、

$$n = \frac{q^2}{p^2}$$

$$\Leftrightarrow np^2 = q^2 \quad (\because p \neq 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 p, q は互いに素な整数であるから、 n は q^2 の倍数であり、自然数 k を用いて $n = kq^2$ と表せる。よって、これを②に代入すると、

$$kq^2 \cdot p^2 = q^2$$

$$\Leftrightarrow kp^2 = 1$$

となる。したがって、 k, p^2 はともに自然数であるから、 $p^2 = 1$ 、すなわち $p = 1$ である。以上より、有理数がある自然数の平方根となるとき、その有理数は整数である。

(証明終)

(3)

有理数とその逆数との差が0でない整数となることはない。このことを背理法を用いて示す。すなわち、有理数とその逆数との差が0でない整数となると仮定して矛盾を導く。この

とき、その有理数を $\frac{q}{p}$ (p, q は互いに素な自然数, $p \neq 0, q \neq 0$)とすると、整数 n ($n \neq 0$)を用いて、

$$\frac{q}{p} - \frac{p}{q} = n$$

$$\Leftrightarrow q^2 - p^2 = npq \quad (\because p \neq 0, q \neq 0)$$

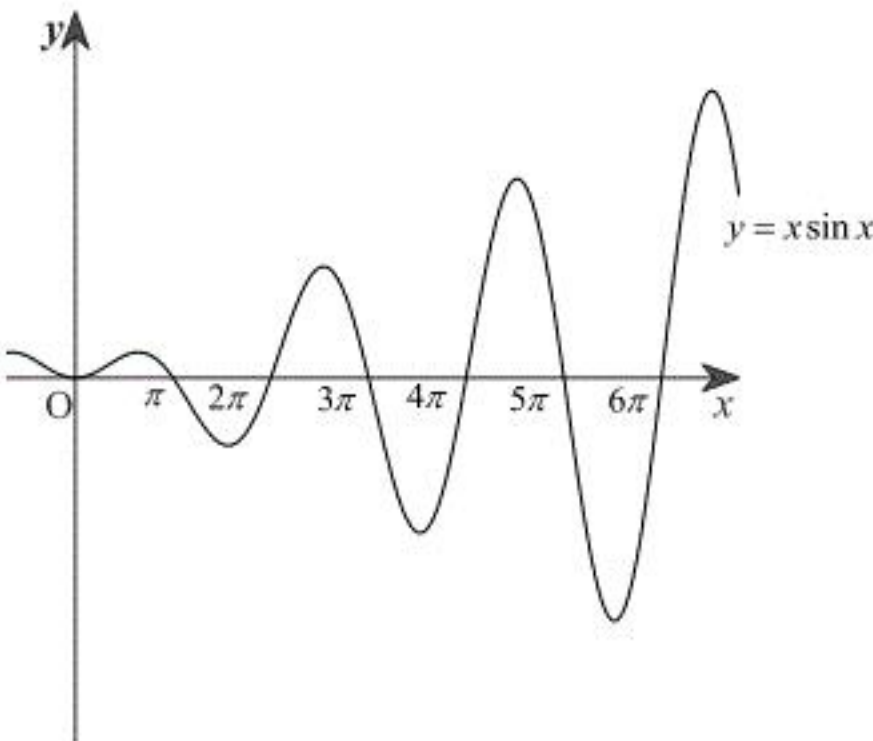
$$\Leftrightarrow (q+p)(q-p) = npq \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。ここで、 p, q は互いに素であるから、 $p+q, p$ と $p-q, p$ はともに互いに素である。よって、③が成立するのは $p=1$ のときであり、同様にして $q=1$ となるが、このとき $n=0$ であり、これは $n \neq 0$ に矛盾する。以上より、有理数とその逆数との差が0でない整数となることはない。

(証明終)

[2]

(1)



$k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$ において、 k が偶数のとき $x \sin x \geq 0$ 、 k が奇数のとき $x \sin x \leq 0$ となることに注意すると、

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |x \sin x| dx \\ &= \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x \sin x dx \right| \\ &= \left| \left[-x \cos x \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} + \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos x dx \right| \\ &= \left| -(k+1)\pi \cos(k+1)\pi + k\pi \cos k\pi + [\sin x]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \right| \\ &= \left| -(k+1)\pi (-1)^{k+1} + k\pi (-1)^k + \sin(k+1)\pi - \sin k\pi \right| \\ &= \left| (2k+1)\pi (-1)^k \right| \\ &= (2k+1)\pi \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} V_k &= \pi \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (x \sin x)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x^2 (1 - \cos 2x) dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 C を積分定数とすると、

$$\begin{aligned} &\int x^2 \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} V_k &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_{k\pi}^{(k+1)\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{3} (k+1)^3 \pi^3 - \frac{1}{3} k^3 \pi^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (k+1)\pi \cos 2(k+1)\pi + \frac{1}{2} k\pi \cos 2k\pi \right\} \\ &= \frac{\pi^4}{6} (3k^2 + 3k + 1) - \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad S_k = (2k+1)\pi, \quad V_k = \frac{\pi^4}{6} (3k^2 + 3k + 1) - \frac{\pi^2}{4}$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^2}{V_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{\frac{\pi^4}{6} (3k^2 + 3k + 1) - \frac{\pi^2}{4}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{k}\right)^2 \pi^2}{\frac{\pi^4}{6} \left(3 + \frac{3}{k} + \frac{1}{k^2}\right) - \frac{\pi^2}{4k^2}} \\ &= \frac{8}{\pi^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^2}{V_k} = \frac{8}{\pi^2}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n S_k &= \sum_{k=0}^n (2k+1)\pi \\ &= \{n(n+1) + (n+1)\} \pi \\ &= \pi (n+1)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、数列 $\{(n+1)^2\}$ は n について単調増加であり、 $n=16$ のとき、 $3.14 < \pi$ より、

$$\pi(16+1)^2 > 3.14 \cdot 17^2 = 907.46 > 900$$

となる。また、 $n=17$ のとき、 $\pi < 3.2$ より、

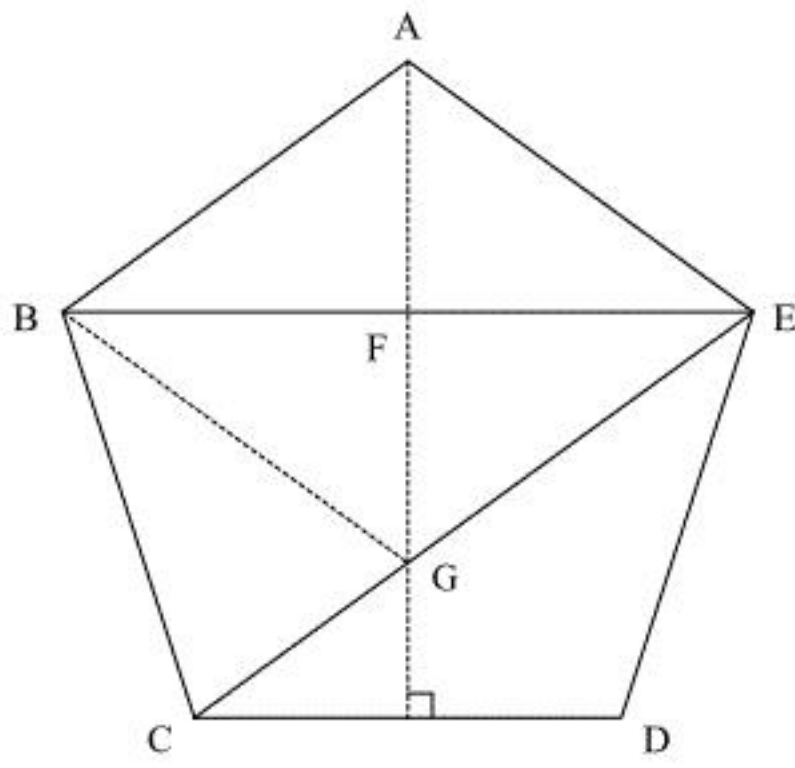
$$\pi(15+1)^2 < 3.2 \cdot 16^2 = 819.2 < 900$$

となるから、 $\sum_{k=0}^n S_k \geq 900$ をみたす最小の整数 n は 16 である。

$$(答) \quad n=16$$

[3]

(1)(i)



正五角形 ABCDE の一つの内角は 108° である。ここで、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle DCE$ はそれぞれ

$AB = AE$ 、 $DC = DE$ の二等辺三角形であるから、

$$\begin{aligned}\angle AEB &= \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ \\ \angle DEC = \angle DCE &= \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\angle BEC &= \angle AED - (\angle AEB + \angle DEC) \\ &= 108^\circ - (36^\circ + 36^\circ) \\ &= 36^\circ\end{aligned}$$

である。したがって、 $\angle AEB = \angle BEC$ であり、また、 $\angle DCE = \angle BEC$ より、錯角が等しいから

BE と CD は平行である。

(証明終)

(ii)

A から CD に下した垂線と CE の交点を G とする。すると、 $\triangle BCG$ と $\triangle ECB$ について、

$$\angle BCG = \angle ECB$$

であり、一方で対称性から

$$\angle CBG = \angle CEB = 36^\circ$$

である。よって、 $\triangle BCG \sim \triangle ECB$ であり、 $CE = x$ とすると、その相似比は $BC : EC = 1 : x$

である。また、 $\triangle BCG$ 、 $\triangle GBE$ はともに二等辺三角形であるから、 $EG = BG = BC = 1$ より、

$$\begin{aligned}CG &= CE - EG \\ &= x - 1\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}BC : EC &= CG : CB \\ \Leftrightarrow 1 : x &= (x - 1) : 1\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}x(x - 1) &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。また、AF は BE の垂直二等分線であるから、

$$FE = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}CE = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

である。したがって、 $\triangle AEF$ について三平方の定理より、

$$\begin{aligned}AF &= \sqrt{AE^2 - FE^2} \\ &= \sqrt{1^2 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad CE = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, AF = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

(2)

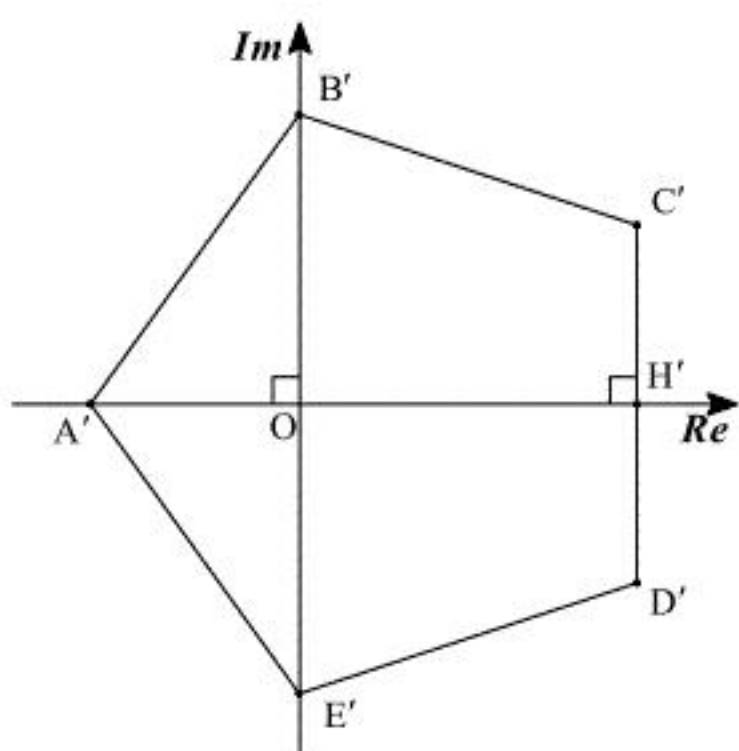
条件(b)より、実数を係数とする方程式 $P(x) = 0$ の解の一つが $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}i$ であるから、その共役複

素数である $-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}i$ も解の一つである。また、実部が負となる解がただ一つ存在するとき、

その解は実数である。よって、条件(a)より解を複素数平面上の点で表すと正五角形の各頂点

になっていることを合わせると、方程式 $P(x) = 0$ の解を表す点は下図の5点 A' 、 B' 、 C' 、 D' 、 E'

となる。



このとき、 $B' \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}i \right)$ 、 $E' \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}i \right)$ である。ここで、 $C'D'$ と実軸の交点を H' とすると、

$B'E' = 1 + \sqrt{5}$ であるから、(1)(ii)より、正五角形 $A'B'C'D'E'$ の一辺の長さは2である。よって、

$$OA' = 2AF = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

であり、すなわち、 $A' \left(-\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \right)$ となる。また、 $\triangle A'C'H'$ において三平方の定理より、

$$\begin{aligned}A'H' &= \sqrt{A'C'^2 - C'H'^2} \\ &= \sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\end{aligned}$$

であるから、

$$OH' = A'H' - OA' = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \right)^2 \\ &= 5 + 2\sqrt{5} + \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4} - \sqrt{30 + 10\sqrt{5}} \\ &= \frac{15 + 3\sqrt{5}}{2} - (5 + \sqrt{5}) \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

より、 $OH' = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$ 、すなわち、 $C' \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + i \right)$ 、 $D' \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - i \right)$ である。以上より、

$$\begin{aligned}P(x) &= \left\{ x - \left(-\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \right) \right\} \left\{ x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}i \right\} \left\{ x - \left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}i \right) \right\} \\ &\quad \left\{ x - \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + i \right) \right\} \left\{ x - \left(\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - i \right) \right\} \\ &= \left(x + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \right) \left(x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ &\quad \left(x^2 - 2\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}x + \frac{5 + \sqrt{5}}{2} + 1 \right) \\ &= \left(x + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \right) \left(x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ &\quad \left(x^2 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}x + \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right)\end{aligned}$$

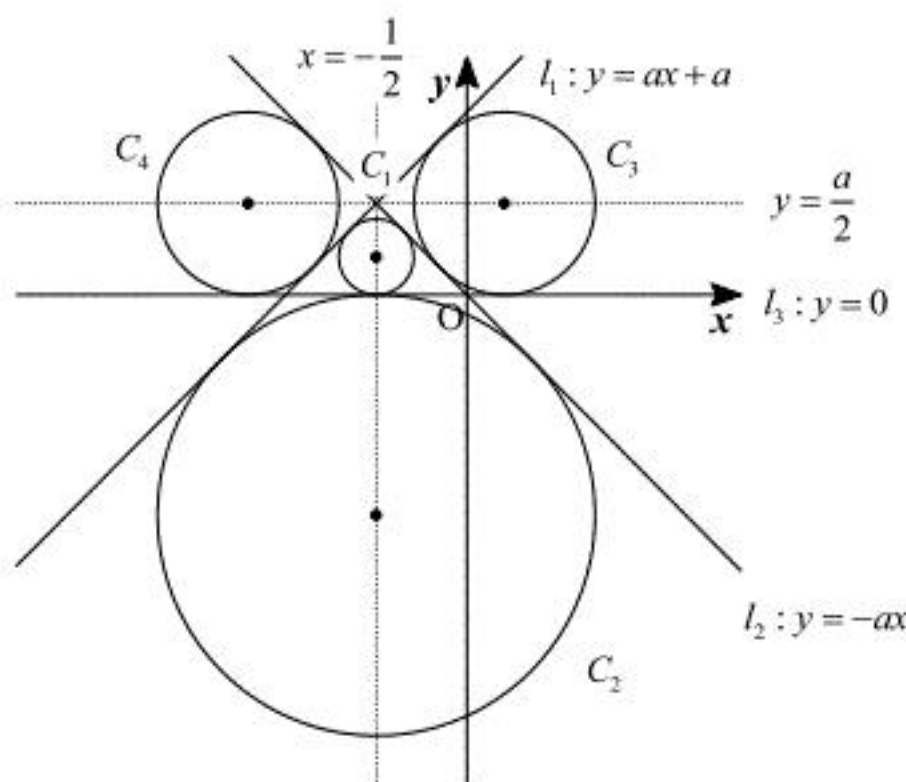
となる。

$$(\text{答}) \quad P(x) = \left(x + \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} \right) \left(x^2 + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x^2 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}x + \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

[4]

(1)

直線 $l_1: y = ax + a$ と直線 $l_2: y = -ax$ の交点の座標は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$ である。よって、3 直線 l_1, l_2, l_3 のいずれとも接する円は下図より 4 円 C_1, C_2, C_3, C_4 となる。



ここで、4 円 C_1, C_2, C_3, C_4 の中心はすべて 2 直線 l_1, l_2 のなす角の二等分線上にあるから、円 C_1, C_2 の中心は直線 $x = -\frac{1}{2}$ 上に、円 C_3, C_4 の中心は直線 $y = \frac{a}{2}$ 上にある。

[1] 円 C_1, C_2 について

中心の y 座標をそれぞれ y_1, y_2 とすると、中心の座標はそれぞれ $\left(-\frac{1}{2}, y_1\right), \left(-\frac{1}{2}, y_2\right)$ と表せる。また、半径はそれぞれ $|y_1|, |y_2|$ であるから、円 C_1, C_2 が直線 $l_2: y = -ax \Leftrightarrow ax + y = 0$ と接するとき、点と直線の距離の公式より、 y_1, y_2 は方程式

$$\begin{aligned} \frac{\left|-\frac{a}{2} + y\right|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= |y| \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{a}{2} + y\right)^2 &= y^2 (a^2 + 1) \\ \Leftrightarrow ay^2 + y - \frac{a}{4} &= 0 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

の異なる 2 解である。よって、

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2a}$$

であるから、円 C_1, C_2 の方程式は、

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2a}\right)^2 = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2a}\right)^2 \quad (\text{複号同順})$$

となる。

[2] 円 C_3, C_4 について

中心の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると、中心の座標はそれぞれ $\left(x_1, \frac{a}{2}\right), \left(x_2, \frac{a}{2}\right)$ と表せる。

また、半径はともに $\frac{a}{2}$ であるから、[1] と同様に考えると、 x_1, x_2 は方程式

$$\begin{aligned} \frac{\left|ax + \frac{a}{2}\right|}{\sqrt{a^2 + 1}} &= \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow \left(ax + \frac{a}{2}\right)^2 &= \frac{a^2}{4} (a^2 + 1) \\ \Leftrightarrow x^2 + x - \frac{a^2}{4} &= 0 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

の異なる 2 解となる。よって、

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2}$$

であるから、円 C_3, C_4 の方程式は、

$$\left(x - \frac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

となる。

$$(\text{答}) \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2a}\right)^2 = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2a}\right)^2 \quad (\text{複号同順}), \left(x - \frac{-1 \pm \sqrt{1 + a^2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

(2)

円 C_1 の半径を $r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + a^2}}{2a}$ 、円 C_2 の半径を $r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{2a}$ 、円 C_3, C_4 の半径を $r_{3,4} = \frac{a}{2}$ とすると、 $a > 0$ において常に $r_1 < r_2$ である。以下、 r_2 と $r_{3,4}$ の大小関係について考えると、 $r_2 > r_{3,4}$ となるのは

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{2a} &> \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + a^2} &> a^2 - 1 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow 1 + a^2 &> (a^2 - 1)^2 > 0 \quad (\because |1 + a^2| > |a^2 - 1|) \\ \Leftrightarrow a^2 (a^2 - 3) &< 0 \\ \therefore 0 < a &< \sqrt{3} \end{aligned}$$

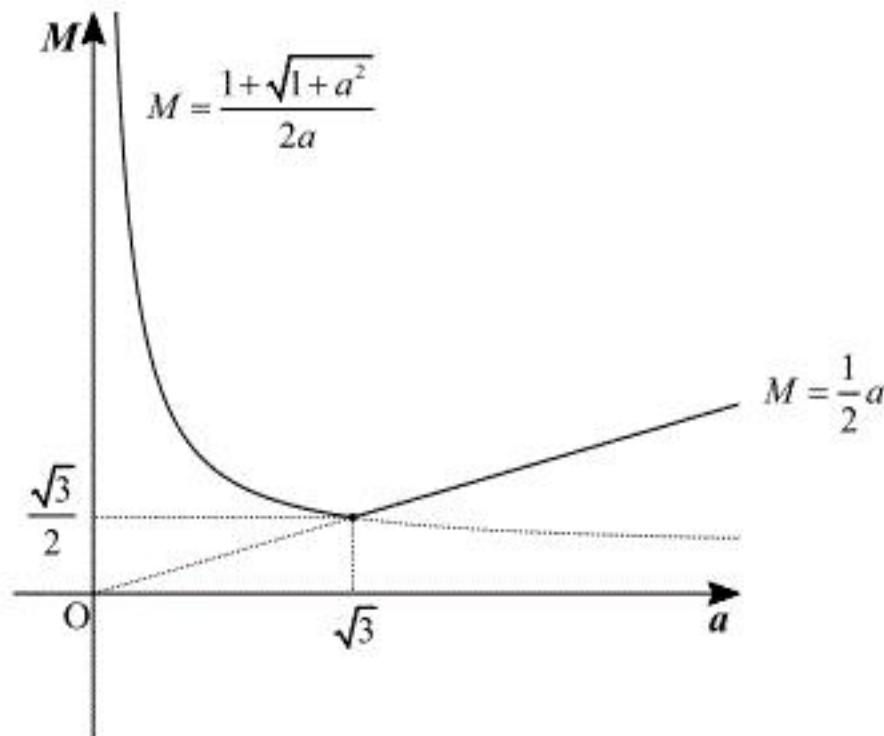
のときである。また、同様に考えると、 $r_2 = r_{3,4}$ となるのは

$$a = \sqrt{3}$$

のときであり、 $r_2 < r_{3,4}$ となるのは

$$\sqrt{3} < a$$

のときである。ここで、 $r_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{2a} = \frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4}}$ は $a > 0$ において単調減少である。以上より、 M のグラフは下図の通りである。



(答) 前図