

平成 30 年 度

数 学

問 題 冊 子

[1] (1) $\sqrt{2}$ は有理数でないことを示せ.

(2) 有理数がある自然数の平方根となるとき, その有理数は整数であることを示せ.

(3) 有理数とその逆数との差が, 0 でない整数となることはあるか. あるときは例を与え, ないときはそのことを示せ.

[2] k を 0 以上の整数とする. 曲線 $y = x \sin x$ ($k\pi \leq x \leq (k+1)\pi$) と x 軸で囲まれた図形を A_k とする. A_k の面積を S_k とし, A_k を x 軸の周りに一回転させてできる立体の体積を V_k とする.

(1) S_k と V_k を求めよ.

(2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_k^2}{V_k}$ を求めよ.

(3) $\sum_{k=0}^n S_k \geq 900$ をみたす最小の整数 n を求めよ.

[3] (1) 一辺の長さ 1 の正五角形 ABCDE がある.

(i) $\angle AEB = \angle BEC$ を示し, BE と CD は平行であることを示せ.

(ii) A から CD に下ろした垂線と BE の交点を F とする. CE と AF の長さを求めよ.

(2) $P(x) = 0$ は実数を係数とする 5 次の方程式であり, その解は次の条件 (a), (b) をみたすものとする. $P(x)$ を実数の範囲で因数分解せよ.

(a) 解を複素数平面上の点として表すと, 正五角形の各頂点となっている.

(b) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}i$ は解の一つで, 実部が負となる解もただ一つ存在する. ただし, i は虚数単位である.

[4] a を正の実数とする. 座標平面において, 次の 3 直線 l_1, l_2, l_3 を考える.

$$l_1: y = ax + a \quad l_2: y = -ax \quad l_3: y = 0$$

(1) 3 直線 l_1, l_2, l_3 のいずれとも接する円の方程式をすべて求めよ.

(2) (1) で求めた円のうちで, 最大となるものの半径を M とする. M を a の関数と考えて, そのグラフをかけ.