

【1】

(1)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned}xy+2 &= 3(x-y) \\ \Leftrightarrow xy-3x+3y+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)(y-3) &= -11\end{aligned}$$

となる。よって、 x, y は共に整数であり、 $x+3, y-3$ も共に整数であるから、

$$\begin{aligned}(x+3, y-3) &= (1, -11), (11, -1), (-1, 11), (-11, 1) \\ \therefore (x, y) &= (-2, -8), (8, 2), (-4, 14), (-14, 4)\end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) (x, y) = (-2, -8), (8, 2), (-4, 14), (-14, 4)$$

(2)

$x \leq y$ のとき、 $y-x=l$ ($0 \leq l \leq 10$, l は整数), $a=456, b=789$ とおくと、

$$\begin{aligned}xy+456 &= 789(x-y) \\ \Leftrightarrow x(x+l)+a &= -bl \\ \therefore x^2+lx+a+bl &= 0\end{aligned}$$

となる。このとき、 x は実数であるから、この 2 次方程式の判別式 D が 0 以上である必要がある。ここで、

$$\begin{aligned}D &= l^2 - 4(a+bl) \\ &= l(l-4b) - 4a\end{aligned}$$

であるが、 $0 \leq l, l-4b \leq 10-4b < 0, -4a < 0$ より、 $D < 0$ となるから不適である。よって、 $x > y$ である。 $x > y$ のとき、 $x-y=k$ ($1 \leq k \leq 10, k$ は整数)とおくと、

$$\begin{aligned}xy+456 &= 789(x-y) \\ \Leftrightarrow y(y+k)+a &= bk \\ \therefore y^2+ky+a-bk &= 0\end{aligned}$$

となる。この 2 次方程式の判別式を D' とすると、

$$\begin{aligned}D' &= k^2 - 4(a-bk) \\ &= k^2 + 4bk - 4a \\ &= k^2 + 4(bk-a)\end{aligned}$$

であり、 $k^2 > 0, bk \geq b > a$ より、 $D' > 0$ である。よって、

$$\begin{aligned}y^2+ky+a-bk &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-k \pm \sqrt{D'}}{2}\end{aligned}$$

となる。このとき、 y は整数であるから、 D' が平方数であることが必要である。以下、平方数の一の位は、0, 1, 4, 5, 6, 9 のいずれかであることを注意して k の値によって場合を分ける。

[1] $k=1$ のとき

$$D' = 1 + 4(789 - 456)$$

より、一の位が 3 となり不適である。

[2] $k=2$ のとき

$$D' = 4 + 4(789 \cdot 2 - 456)$$

より、一の位が 2 となり不適である。

[3] $k=3$ のとき

$$D' = 9 + 4(789 \cdot 3 - 456)$$

より、一の位が 3 となり不適である。

[4] $k=4$ のとき

$$D' = 16 + 4(789 \cdot 4 - 456) = 10816 = 104^2$$

より、適する。

[5] $k=5$ のとき

$$D' = 25 + 4(789 \cdot 5 - 456) = 13981 = 11 \cdot 31 \cdot 41$$

より、不適である。

[6] $k=6$ のとき

$$D' = 36 + 4(789 \cdot 6 - 456)$$

より、一の位が 8 となり不適である。

[7] $k=7$ のとき

$$D' = 49 + 4(789 \cdot 7 - 456)$$

より、一の位が 7 となり不適である。

[8] $k=8$ のとき

$$D' = 64 + 4(789 \cdot 8 - 456)$$

より、一の位が 8 となり不適である。

[9] $k=9$ のとき

$$D' = 81 + 4(789 \cdot 9 - 456) = 26661 = 3 \cdot 8887$$

より、不適である。

[10] $k=10$ のとき

$$\begin{aligned}D' &= 100 + 4(789 \cdot 10 - 456) = 29836 = 4 \cdot 7459, \\ 86^2 &= 7396 < 7459 < 87^2 = 7569\end{aligned}$$

より、不適である。

以上[1]~[10]より、 $k=4$ が必要であり、逆にこのとき、

$$y = \frac{-4 \pm 104}{2} = 50, -54$$

と y は整数となり、十分である。よって、 $x=y+k$ より、求める x, y の組は、

$$(x, y) = (54, 50), (-50, -54)$$

である。

$$(\text{答}) (x, y) = (54, 50), (-50, -54)$$

[2]

(1)

正の実数 r を用いて、 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおく。すると、

$$\begin{aligned} z + \frac{1}{z} &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r} \{ \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \} \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r} (\cos \theta - i \sin \theta) \\ &= \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

となる。これが実数となるとき、 $r > 0$ に注意して、

$$\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = 0$$

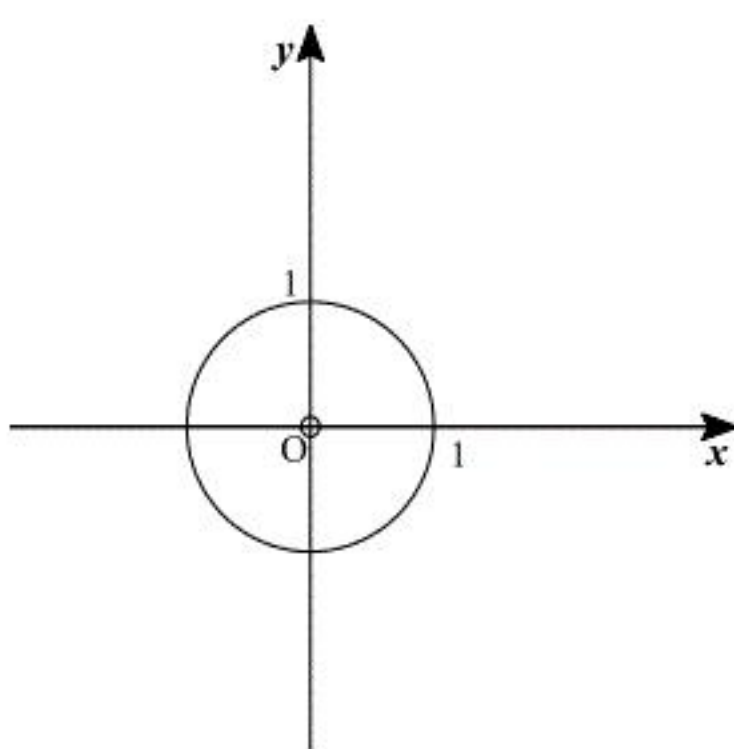
$$\Leftrightarrow r - \frac{1}{r} = 0 \text{ または } \sin \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 1 = 0 \text{ または } \operatorname{Im} z = 0, z \neq 0$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \text{ または } \operatorname{Im} z = 0, z \neq 0 \text{ } (\because r > 0)$$

$$\Leftrightarrow |z| = 1 \text{ または } \operatorname{Im} z = 0, z \neq 0$$

となる。これを図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(2)

z が 0 でない実数であるとき、

$$w = z + \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow zw = z^2 + 1$$

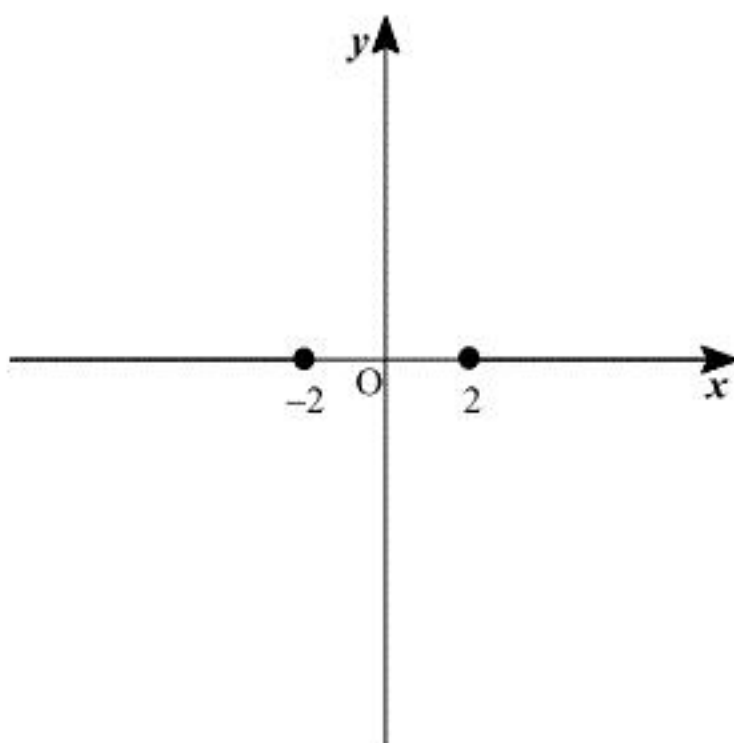
$$\Leftrightarrow z^2 - wz + 1 = 0$$

である。よって、 $z = 0$ がこの方程式を満たさないことと、 w が実数であることに注意すれば、このような実数 z が存在する w の範囲は、

$$w^2 - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow w \leq -2, 2 \leq w$$

となる。これを図示すると以下のようになる。



(答) 前図

(3)

$z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$ に辺々 $z (\neq 0)$ をかけて整理すると、 $z^2 - 2(\cos \theta)z + 1 = 0$ となる。よって、解の公式より、

$$\begin{aligned} z &= \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \\ &= \cos \theta \pm i |\sin \theta| \\ &= \cos \theta \pm i \sin \theta \end{aligned}$$

である。

(答) $z = \cos \theta \pm i \sin \theta$

(4)

$$z + \frac{1}{z} = z^5 + \frac{1}{z^5}$$

$$\Leftrightarrow z^6 + z^4 = z^{10} + 1 \text{ } (\because z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (z^6 - 1)(z^4 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \cos \frac{k}{3} \pi + i \sin \frac{k}{3} \pi, \cos \frac{l}{2} \pi + i \sin \frac{l}{2} \pi$$

$$(k = 0, 1, \dots, 5, l = 0, 1, \dots, 3)$$

となる。よって、このうち相異なるものは、偏角が $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$ であるものの 8 個である。

(答) 8 個

[3]

点 P の座標を (p, p^2) とする。このとき PQ の長さは、

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (p-1)^2 + (p^2-3)^2 \\ &= p^4 - 5p^2 - 2p + 10 \end{aligned}$$

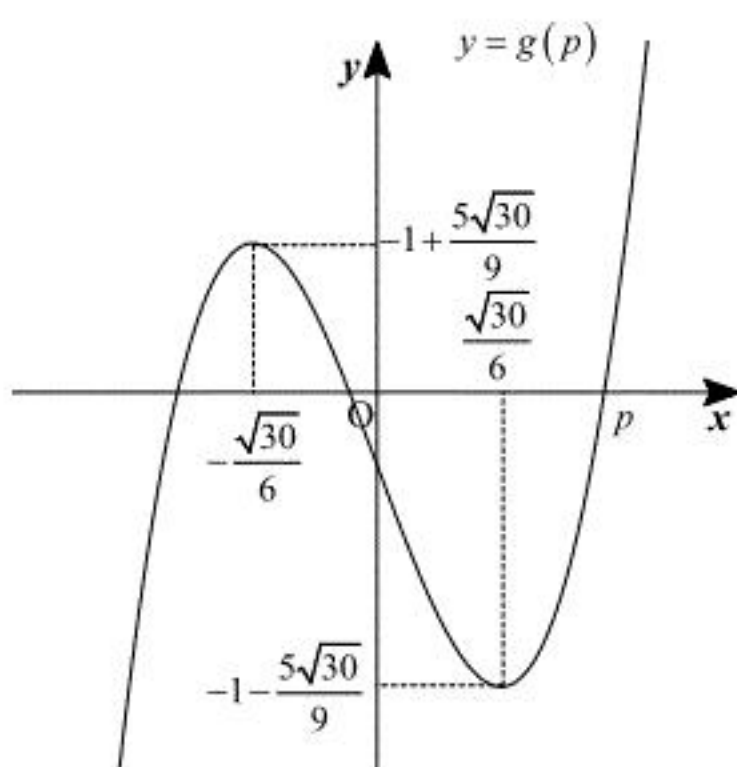
となる。 $f(p) = p^4 - 5p^2 - 2p + 10$ とおくと、

$$f'(p) = 2(2p^3 - 5p - 1)$$

となる。ここで、 $g(p) = 2p^3 - 5p - 1$ とおくと、 $f'(p)$ と $g(p)$ の符号は一致し、

$$\begin{aligned} g'(p) &= 6p^2 - 5 \\ &= 6\left(p + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)\left(p - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $y = g(p)$ のグラフは以下のようになる。



ここで、 $g(2) = 5 > 0$, $g(-2) = -7 < 0$, $-2 < -\frac{\sqrt{30}}{6}$ に注意する。よって、 $g(p) = 0$ の 3 解を α, β, γ ($-2 < \alpha < \beta < \gamma < 2$) とすると、 $f(p)$ の増減は以下の表のようになる。

p	-2	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$	2
$f'(p)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$f(p)$	10	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$f(\gamma)$	$\nearrow$	2

ここで、

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} > 0, g(0) = -1 < 0, g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{7}{4} < 0$$

より、

$$-2 < \alpha < -\frac{1}{2} < \beta < 0, \frac{3}{2} < \gamma < 2$$

であることに注意する。また、

$$f(p) = \frac{1}{2}pg(p) - \frac{5}{2}p^2 - \frac{3}{2}p + 10$$

より、

$$f(\beta) - 10 = -\frac{1}{2}\beta(5\beta + 3) \quad (\because g(\beta) = 0)$$

であり、

$$\beta < 0, 5\beta + 3 > 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 > 0$$

であるから $f(\beta) > 10 = f(-2)$ である。すなわち $f(p)$ は $p = \beta$ で最大値をとる。また、 $g(\alpha) = g(\gamma) = 0$ より、

$$\begin{aligned} f(\gamma) - f(\alpha) &= \left(-\frac{5}{2}\gamma^2 - \frac{3}{2}\gamma - 10\right) - \left(-\frac{5}{2}\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha - 10\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\gamma - \alpha)\{5(\gamma + \alpha) + 3\} \end{aligned}$$

であり、

$$\gamma - \alpha > 0, 5(\gamma + \alpha) + 3 > 5\left(\frac{3}{2} - 2\right) + 3 > 0$$

であるから、 $f(\gamma) < f(\alpha)$ である。すなわち $f(p)$ は $p = \gamma$ で最小値をとる。以上から PQ が

最大、最小となるときの P の x 座標はそれぞれ $-\frac{1}{2}$ 以上、 $\frac{3}{2}$ 以上である。

(証明終)

また、

$$\begin{aligned} g(-0.2) &= -0.016 < 0, g(-0.3) = 0.446 > 0, \\ g(1.6) &= -0.808 < 0, g(1.7) = 0.326 > 0 \end{aligned}$$

と中間値の定理より、 β, γ を小数第 1 位まで求めるとそれぞれ $-0.2, 1.6$ である。

(答) 最大となる P の x 座標： -0.2 、最小となる P の x 座標： 1.6

[4]

(1)

与えられた漸化式を用いると、

$$a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = -2$$

$$a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3} = \frac{1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1+a_4}{1-a_4} = 3$$

となる。

$$(答) \quad a_2 = -2, a_3 = -\frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = 3$$

(2)

(1)より、数列 $\{a_n\}$ は $3, -2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ を周期4でこの順に繰り返すことがわかる。よって、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{4n} \frac{a_k}{2^k} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{3}{2^{4i-3}} + \sum_{i=1}^n \frac{-2}{2^{4i-2}} + \sum_{i=1}^n \frac{-\frac{1}{3}}{2^{4i-1}} + \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{2}}{2^{4i}} \\ &= \left(24 - 8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 - \frac{1}{16}} \\ &= \frac{19}{18} \left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{19}{18} \left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^n\right\} \\ &= \frac{19}{18} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{19}{18}$$

(3)

順次代入して計算すると、

$$b_1 = a_1 = 3$$

$$b_2 = a_8 = \frac{1}{2}$$

$$b_3 = a_{27} = -\frac{1}{3}$$

$$b_4 = a_{64} = \frac{1}{2}$$

$$b_5 = a_{125} = 3$$

となる。よって、

$$c_1 = b_1 = 3$$

$$c_2 = b_1 b_2 = \frac{3}{2}$$

$$c_3 = b_1 b_2 b_3 = -\frac{1}{2}$$

$$c_4 = b_1 b_2 b_3 b_4 = -\frac{1}{4}$$

$$c_5 = b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 = -\frac{3}{4}$$

となる。

$$(答) \quad c_1 = 3, c_2 = \frac{3}{2}, c_3 = -\frac{1}{2}, c_4 = -\frac{1}{4}, c_5 = -\frac{3}{4}$$

(4)

以下、合同式の法を4とすると、

$$n \equiv 0 \Rightarrow n^3 \equiv 0 \Rightarrow a_{n^3} = \frac{1}{2}$$

$$n \equiv 1 \Rightarrow n^3 \equiv 1 \Rightarrow a_{n^3} = 3$$

$$n \equiv 2 \Rightarrow n^3 \equiv 0 \Rightarrow a_{n^3} = \frac{1}{2}$$

$$n \equiv 3 \Rightarrow n^3 \equiv 3 \Rightarrow a_{n^3} = -\frac{1}{3}$$

となるから、

$$n \equiv 0 \Rightarrow b_n = \frac{1}{2}$$

$$n \equiv 1 \Rightarrow b_n = 3$$

$$n \equiv 2 \Rightarrow b_n = \frac{1}{2}$$

$$n \equiv 3 \Rightarrow b_n = -\frac{1}{3}$$

となる。よって、 $\{c_n\}$ は初項3に $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 3$ をこの順に繰り返しかけた数からなる数列であ

り、 $c_{n+4} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 c_n = -\frac{1}{4} c_n$ が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{4n} c_k \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{3}{(-4)^{i-1}} + \sum_{i=1}^n \frac{\frac{3}{2}}{(-4)^{i-1}} + \sum_{i=1}^n \frac{-\frac{1}{2}}{(-4)^{i-1}} + \sum_{i=1}^n \frac{-\frac{1}{4}}{(-4)^{i-1}} \\ &= \left(3 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{4}} \\ &= 3 \left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left\{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad 3$$