



平成10年度 数 学

問 題 冊 子

注 意 事 項

1. 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. この問題冊子は、6ページに組んである。
なお、落丁、乱丁及び印刷不鮮明なところがあればすぐ申し出ること。
3. 解答用紙には、必ず本学の受験番号を、それぞれ2箇所共に記入すること。
4. 解答は、問題番号に対応する解答用紙に記入すること。また選択問題については
所定の欄に選択した問題番号を記入すること。
5. 記入した解答用紙は、裏返して机の上におくこと。
6. 解答用紙の中の※の欄には記入してはいけない。
7. 解答用紙の交換は原則として行わない。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 次の不等式の表す領域を D とする。

$$\log_2(x^2 + y^2 - 4) - \log_2(x + y - 2) \leq 2$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 直線 $y = -2x + a$ が領域 D を通るとき a の範囲を求めよ。

2 $a > 1, b > 0$ のとき,

$$f(x) = \int_{x-b}^{x+b} (t^2 - 2at) dt$$

とおく。方程式 $f(x) = 0$ が、ただ1個の解をもつとき、次の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $\int_0^a f(x) dx = af(1)$ となるとき、 a の値を求めよ。

- 3** 問題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの中から1問を選択して解答せよ。解答用紙に選択した問題番号を記入すること。

Ⅰ (1) n を自然数とするととき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$x \sum_{k=1}^n k(1+x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} (1+x)^{k-1} = (n+1)(1+x)^n$$

(2) $n > 2$ となる自然数 n について

$$\sum_{k=3}^n {}_{k-1}C_2 \cdot k + \sum_{k=1}^{n+1} {}_{k-1}C_3$$

を簡単にせよ。ただし，自然数 p, q に対し，

$${}_pC_q = \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q(q-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

である。

Ⅱ 自然数 m, n に対して，

$$S = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

とおく。 m, n が $m \geq n$ および $S < \frac{1}{3}$ を満たしながら動くとき，次の問いに答えよ。

(1) $n = 4$ のとき，および $n = 7$ のとき，それぞれ S の最大値を求めよ。

(2) S の最大値を求めよ。

Ⅲ $\triangle ABC$ の辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。線分 AD 上を点 P が、点 A, D に重ならないように動くとき、次の問いに答えよ。

(1) 直線 BP と辺 AC の交点を Q 、直線 CP と辺 AB の交点を R とする。

直線 QR は定点を通ることを証明せよ。

(2) 2点 B, C を通る円が点 X で直線 QR に接するとき、点 X の軌跡を求めよ。

問題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの中から1問を選択して解答せよ。解答用紙に選択した問題番号を記入すること。

Ⅰ 空間内に5点 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(a+1, 0, 1)$, $P(x, y, 0)$ がある。ただし $a > 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\angle OBP = \angle ACP = 45^\circ$ であるとき、点 P の座標を a を用いて表せ。

(2) さらに $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{CP}$ であるとき、 a の値を求めよ。

Ⅱ 複素数平面上において、原点 O を中心とする半径 1 の円周上に2点 $P(z)$, $Q(w)$ がある。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $z - 2w - \sqrt{3} = 0$ のとき、 $\triangle OPQ$ の面積を求めよ。

(2) $0^\circ < \arg z < 45^\circ$, $0^\circ < \arg w < 45^\circ$ のとき、

$$\arg \frac{(z-1)(w-1)}{zw-1}$$

を求めよ。

Ⅲ 袋の中に赤玉 3 個と白玉 4 個が入っている。この袋の中から玉がなくなるまで無作為に 1 個ずつ取り出す。ただし、一度取り出した玉は袋に戻さないものとする。 X 回目に赤玉の 2 個目を取り出すとするとき、次の問いに答えよ。

- (1) X の確率分布を求めよ。
- (2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。
- (3) 赤玉の 2 個目を取り出したちょうど 2 回後に、赤玉の 3 個目を取り出す確率を求めよ。

Ⅳ A, B を 2 次の正方行列とする。0 でない実数 p, q を用いて $AB = pA + qB$ と表されるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $(A - qE)(B - pE) - pqE$ を示せ。ただし、 E は単位行列とする。
- (2) $AB = BA$ を示せ。
- (3) さらに、 $A^2 = A - E$ を満たすとき
$$pqA = (-q^2 + q - 1)B + pE$$
を示せ。