

平成10年度 数 学

問 題 冊 子

注 意 事 項

1. 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. この問題冊子は、7ページに組んである。

なお、落丁、乱丁及び印刷不鮮明なところがあればすぐ申し出ること。

3. 解答用紙には、必ず本学の受験番号を、それぞれ2箇所共に記入すること。
4. 解答は、問題番号に対応する解答用紙に記入すること。また選択問題については所定の欄に選択した問題番号を記入すること。
5. 記入した解答用紙は、裏返して机上におくこと。
6. 解答用紙の中の※の欄には記入してはいけない。
7. 解答用紙の交換は原則として行わない。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 次の不等式の表す領域を D とする。

$$\log_2(x^2 + y^2 - 4) - \log_2(x + y - 2) < 2$$

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 直線 $y = -2x + a$ が領域 D を通るときの a の範囲を求めよ。

2 $x \geq 0$ で定義された関数 $f(x) = e^{-x}(\sin x - \cos x)$ の極大値を与える x を小さい順に $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) x_n を求めよ。

(2) $a_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x) dx$ を求め、 $\{a_n\}$ が等比数列になることを示せ。

3

4点 O, A, B, C を頂点とする四面体 $OABC$ で、

$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ とし、辺 OA, OB, OC の長さを 1 とする。

辺 OA, OB をそれぞれ n 等分し、その分点を

$O = A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A, O = B_0, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}, B_n = B$

とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\triangle A_k B_k C$ ($k = 1, 2, \dots, n$) の面積 S_k を k と n を用いて表せ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ を求めよ。

- 4 問題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの中から1問を選択して解答せよ。解答用紙に選択した問題番号を記入すること。

Ⅰ (1) n を自然数とすると、次の等式が成り立つことを示せ。

$$x \sum_{k=1}^n k(1+x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} (1+x)^{k-1} = (n+1)(1+x)^n$$

(2) $n > 2$ となる自然数 n について

$$\sum_{k=3}^n {}_{k-1}C_2 k + \sum_{k=4}^{n+1} {}_{k-1}C_3$$

を簡単にせよ。ただし、自然数 p, q に対し、

$${}_pC_q = \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q(q-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

である。

Ⅱ 自然数 m, n に対して、

$$S = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

とおく。 m, n が $m \geq n$ および $S < \frac{1}{3}$ を満たしながら動くとき、次の問いに答えよ。

(1) $n = 4$ のとき、および $n = 7$ のとき、それぞれ S の最大値を求めよ。

(2) S の最大値を求めよ。

Ⅲ $\triangle ABC$ の辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。線分 AD 上を点 P が、点 A, D に重ならないように動くとき、次の問いに答えよ。

(1) 直線 BP と辺 AC の交点を Q 、直線 CP と辺 AB の交点を R とする。
直線 QR は定点を通ることを証明せよ。

(2) 2点 B, C を通る円が点 X で直線 QR に接するとき、点 X の軌跡を求めよ。

- 5 問題Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳの中から1問を選択して解答せよ。解答用紙に選択した問題番号を記入すること。

Ⅰ 空間内に5点 $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(a+1, 0, 1)$, $P(x, y, 0)$ がある。ただし $a > 0$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\angle OBP = \angle ACP = 45^\circ$ であるとき、点 P の座標を a を用いて表せ。
- (2) さらに $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{CP}$ であるとき、 a の値を求めよ。

Ⅱ 複素数平面上において、原点 O を中心とする半径1の円周上に2点 $P(z)$, $Q(w)$ がある。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $z - 2w - \sqrt{3} = 0$ のとき、 $\triangle OPQ$ の面積を求めよ。
- (2) $0^\circ < \arg z < 45^\circ$, $0^\circ < \arg w < 45^\circ$ のとき、

$$\arg \frac{(z-1)(w-1)}{zw-1}$$

を求めよ。

Ⅲ 袋の中に赤玉 3 個と白玉 4 個が入っている。この袋の中から玉がなくなるまで無作為に 1 個ずつ取り出す。ただし、一度取り出した玉は袋に戻さないものとする。 X 回目に赤玉の 2 個目を取り出すとするとき、次の問いに答えよ。

- (1) X の確率分布を求めよ。
- (2) X の期待値 $E(X)$ を求めよ。
- (3) 赤玉の 2 個目を取り出したちょうど 2 回後に、赤玉の 3 個目を取り出す確率を求めよ。

Ⅳ A, B を 2 次の正方行列とする。0 でない実数 p, q を用いて $AB = pA + qB$ と表されるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $(A - qE)(B - pE) = pqE$ を示せ。ただし、 E は単位行列とする。
- (2) $AB = BA$ を示せ。
- (3) さらに、 $A^2 - A - E$ を満たすとき
$$pqA = (-q^2 + q - 1)B + pE$$
を示せ。