S

平成11年度　数　　　　　学

問　題　冊　子

注　意　事　項

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開いてはいけない。
2. この問題冊子は，7ページに組んである。
   なお，落丁，乱丁及び印刷不鮮明なところがあればすぐ申し出ること。
3. 解答用紙には，必ず本学の受験番号を，それぞれ2箇所共に記入すること。
4. 解答は，問題番号に対応する解答用紙に記入すること。また選択問題については所定の欄に選択した問題番号を記入すること。
5. 記入した解答用紙は，裏返して机上におくこと。
6. 解答用紙の中の※の欄には記入してはいけない。
7. 解答用紙の交換は原則として行わない。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

1 a，b を実数とするとき，x の方程式

$$a\cdot 4^x + b\cdot 2^{x+1} - a + 2 = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この方程式が異なる2つの実数解 $x = r$，$x = r\log_2 3$ をもつとき，a，b の値を r を用いて表せ。

(2) $a > 0$ のとき，この方程式がただ1つの実数解をもつための a，b に関する条件を求めよ。

2 $x \geqq 1$のとき，

$$f(x)=\int_1^{x^2}\left|\frac{x}{t}-\frac{1}{2}\right|dt$$

とおく。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 1+0}\frac{f(x)}{x-1}$ を求めよ。ただし，$x \to 1+0$ は，x が 1 より大きい値をとりながら 1 に近づくことを表す。

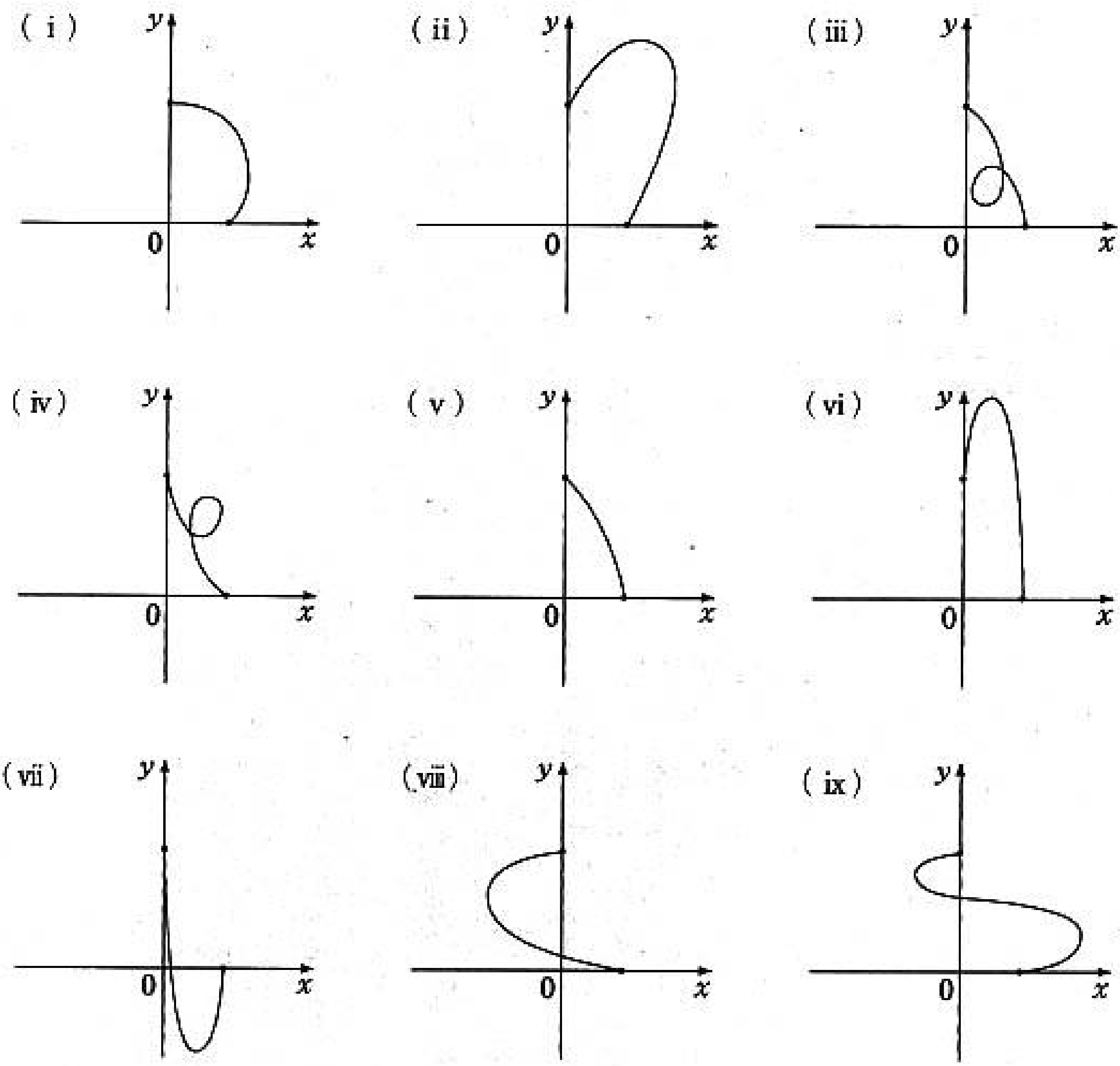
3 $f(t) = 3\cos t - \cos 3t$, $g(t) = 3\sin t - \sin 3t$ とする。

曲線 $C : x = f(t)$, $y = g(t)$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $x = f(t)$ および $y = g(t)$ の t に関する増減をそれぞれ調べよ。

(2) 曲線 C の概形として最も適切なものを下の図 (i)～(ix) の中から１つ選べ。

(3) 曲線 C, x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。



4 問題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの中から１問を選択して解答せよ。解答用紙に選択した問題番号を記入すること。

Ⅰ　数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が

$$a_n = \frac{\sin n\theta \sin\theta}{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\ \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

で与えられている。ただし，すべての自然数 n に対して，$\sin n\theta \neq 0$ とする。

(1) $\dfrac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin n\theta}$ が n によらないことを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

Ⅱ　a，b，c，d を正の数とし，n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $a=3$，$b=4$，$c=5$，$d=6$ のとき，$a^n+b^n+c^n$ と d^n の大小関係を調べよ。

(2) $a^3+b^3+c^3=d^3$ のとき，$a^n+b^n+c^n$ と d^n の大小関係を調べよ。

III　鋭角三角形 ABC の各頂点 A，B，C から対辺に下ろした垂線の足をそれぞれ P，Q，R とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle APQ = \angle APR$ であることを証明せよ。

(2)　点 A は $\triangle PQR$ の傍心であることを証明せよ。

5 問題Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの中から１問を選択して解答せよ。解答用紙に選択した問題番号を記入すること。

Ⅰ　１辺の長さが１の正四面体 OABC において，辺 OA を $1:2$ に内分する点を L，辺 OB を $2:1$ に内分する点を M とし，辺 BC 上に $\angle \mathrm{LMN}$ が直角となるように点 N をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　BN : NC を求めよ。

(2)　$\angle \mathrm{MNB} = \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

Ⅱ　α は複素数平面上の点で，$0 < |\alpha| < 1$ を満たしている。原点と α から等距離にある点 z について，次の問いに答えよ。

(1)　$1 + \overline{\alpha}z \neq 0$ を示せ。

(2)　$|z| \leqq 1$ のとき，$\left|\dfrac{z - 2\alpha}{1 + \overline{\alpha}z}\right| \leqq 1$ が成り立つことを示せ。

Ⅲ　数直線上の点Qは，2枚のコインを同時に投げて，どちらも表が出たら$+1$移動し，どちらも裏が出たら-1移動し，他の場合はその位置にとどまる。Qの出発点の座標を$A_0=0$とし，このコイン投げをn回くり返した後のQの座標をA_nとする。XをA_0，A_1，A_2，A_3，A_4の最大の値とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$A_4=0$となる確率を求めよ。

(2)　$A_4=0$になったとして，$X=0$となる条件つき確率を求めよ。