1 〔全学部共通〕

実数a，bが次の２つの不等式をみたしている。

$$b \geqq 14-3a,\quad 20-a^2 \geqq 2b$$

(1) $\log_a b$ のとる値の範囲を求めよ。

(2) ２直線 $y=(1-x)\log_a b$，$y=(1+x)\log_b a$ の交点の軌跡を図示せよ。

2 〔全学部共通〕

$$|\overrightarrow{OA}| = 1,\quad |\overrightarrow{OB}| = 4,\quad |\overrightarrow{OC}| = 2$$

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 1,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 2,\quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = 1$$

をみたす四面体 OABC がある。辺 OA を 3 : 1 に内分する点を D，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を E とする。線分 AE と線分 DB の交点を F とする。

(1) $\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $\angle$FOC を求めよ。

3 〔全学部共通〕

数列$\{a_n\}$と数列$\{b_n\}$は以下の式で定められるものとする。

$$a_1 = 1,\ b_1 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n - b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$
$$b_{n+1} = a_n + b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) nを自然数とするとき，次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。ただし，iは虚数単位である。

$$a_n + b_n i = (1 + i)^n$$

(2) $a_N = 2^{100}$となる自然数Nをすべて求めよ。

4 〔教育学部・経済学部共通〕(注：システム工学部受験者は解答しないこと)

放物線 $C : y = x^2$ 上の異なる 2 点 A，B における 2 本の接線の交点を P とする。

(1) 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とするとき，点 P の座標を α，β を用いて表せ。

(2) 点 P が直線 $y = x - 1$ 上にあるように点 A，B が動くとき，放物線 C と，点 A，B における 2 本の接線で囲まれる部分の面積の最小値を求めよ。

5 〔システム工学部〕(注：教育学部および経済学部受験者は解答しないこと)

$$f(x)=x^3e^x-14e^{-x}+\int_0^x 2e^{2t-x}(-6t^2+8t-7)\,dt$$

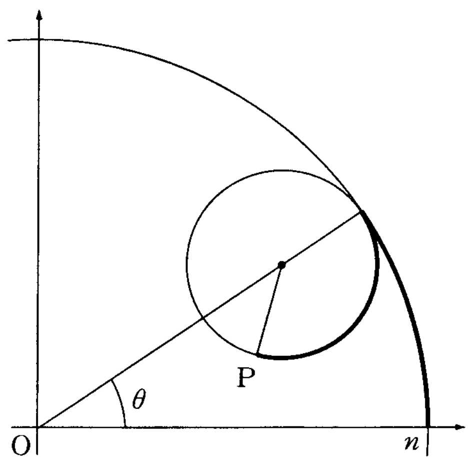
とおく。ただし，e は自然対数の底で，$2.71<e<2.72$ である。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)+a=0$ が異なる3つの正の実数解をもつとき，定数 a の範囲を求めよ。

6 〔システム工学部〕(注：教育学部および経済学部受験者は解答しないこと)

座標平面上に，原点 O(0 , 0)を中心とし，半径が n の定円がある。ただし，n は 3 以上の自然数である。この定円の内側を，半径 1 の円 C がすべることなく回転する。このとき，動円 C 上の定点 P はある曲線を描く。最初，点P は点 $(n,\ 0)$ の位置にあるとする。原点と動円 C の中心を結ぶ線分と x 軸とのなす角を θ ラジアンとする。



(1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，

$x = (n-1)\cos\theta + \cos(n-1)\theta,\quad y = (n-1)\sin\theta - \sin(n-1)\theta$

を示せ。

(2) 点 P が，$\theta = 0$ から $\theta = 2\pi$ までの間に描いた曲線の長さを求めよ。