

1

[全学部共通]

四面体 OABC があり、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ のどの 2 つのベクトルも垂直であるとする。

$2 < a < 4$ として 3 点 P, Q, R を

$$\overrightarrow{OP} = \frac{4}{4-a} \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = 2 \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = \frac{4}{3} \overrightarrow{OC}$$

のようにとる。線分 AB を $a:2$ に外分する点を S, 線分 BC を $2:1$ に外分する点を T とおく。△PQR が正三角形であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{OT}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。
- (2) ベクトルの大きさの比 $|\overrightarrow{OA}| : |\overrightarrow{OB}| : |\overrightarrow{OC}|$ を a を用いて表せ。
- (3) $\overrightarrow{PR}$ と $\overrightarrow{ST}$ が垂直となるとき、 a の値を求めよ。

2

[全学部共通]

初項 $\frac{3}{2}$ ，公差 1 の等差数列を $\{a_n\}$ とする。 a_n を並べて，

$$a_1 \mid a_2, a_3 \mid a_4, a_5, a_6, a_7 \mid a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15} \mid a_{16}, a_{17}, \dots$$

のように群に分け，第 k 群がちょうど 2^{k-1} 個の項を含むようにする。

第 k 群に含まれる項の総和を T_k とするとき，次の問いに答えよ。

ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ ， $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) 第 k 群の最初の項と最後の項を k の式で表せ。

(2) T_k を求めよ。

(3) $T_k > 10^{50}$ となる最小の k を求めよ。

3

[全学部共通]

複素数平面上の異なる3点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ が

$$\alpha + i\beta = (1 + i)\gamma, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) $\triangle ABC$ は直角二等辺三角形であることを示せ。
- (2) $45^\circ < \arg \alpha < 90^\circ$, $\arg \beta = 45^\circ$ のとき、実数 x, y を用いて $\gamma = x + yi$ と表せば

$$x > 0, \quad y > 0$$

となることを示せ。

4

〔教育学部・経済学部共通〕（注：システム工学部受験者は解答しないこと）

2つの放物線

$$y = 2x^2,$$

$$y = x^2 + (4 \log_a 2 + \log_2 a)x - 4$$

で囲まれた図形の面積を S とするとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a > 4$ とする。(1) S を求めよ。(2) $S = \frac{9}{2}$ のとき、 a の値を求めよ。

5 [システム工学部] (注：教育学部および経済学部受験者は解答しないこと)

自然数 n について $a_n = \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n dx$ とする。

(1) $a_n \leq \frac{e-1}{n!}$ となることを示せ。

(2) $n \geq 2$ について $a_n = \frac{e}{n!} - a_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) $n \geq 2$ について $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ とする。 S_n を a_n を用いて表し、
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

6

[システム工学部] (注：教育学部および経済学部受験者は解答しないこと)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ とし, 関数 } f(\theta) \text{ を}$$

$$f(\theta) = (\cos \theta \ \sin \theta) A \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

で定める。 $0 \leq \theta < 2\pi$ における $f(\theta)$ の最小値を m とするとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(\theta)$ を $a \cos 2\theta + b \sin 2\theta + c$ の形に表せ。ただし a, b, c は定数とする。

(2) m を求めよ。

(3) 3 以上の自然数 k について

$$A^k = A^{k-1} + 6A^{k-2}$$

が成り立つことを示せ。

(4) 自然数 k について

$$(\cos \theta \ \sin \theta) A^k \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \geq m^k$$

が成り立つことを示せ。