

(1)

与方程式は

$$\begin{aligned}\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos\theta(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta - \sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos\theta\left\{2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2}\right\} &= 0\end{aligned}$$

と変形できるから、 $\cos\theta = 0$ または $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

[1] $\cos\theta = 0$ のとき

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ となる。}$$

[2] $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } -\frac{\pi}{3} \leq \theta - \frac{\pi}{3} \leq \frac{2}{3}\pi \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned}\theta - \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{4} \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{7}{12}\pi\end{aligned}$$

となる。

以上[1],[2]より、 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi$ が解である。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi$$

(2)

真数条件より $x > 0$ である。与不等式の両辺について、2 を底とする対数をとると、

$$\begin{aligned}x \log_{\frac{1}{2}} x &\geq -\frac{1}{2} \log_2 x \\ \Leftrightarrow -x \log_2 x &\geq -\frac{1}{2} \log_2 x \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - x\right) \log_2 x &\geq 0\end{aligned}$$

と変形できる。上式より、

$$0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ かつ } \log_2 x \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

または

$$x \geq \frac{1}{2} \text{ かつ } \log_2 x \leq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。

[1] ①について

$$0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ かつ } x \geq 1 \text{ となり, これは不適である。}$$

[2] ②について

$$x \geq \frac{1}{2} \text{ かつ } 0 < x \leq 1, \text{ すなわち } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ となる。}$$

以上[1],[2]より、不等式の解は $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

(1)

与えられた条件より $|\vec{a}-\vec{b}| \leq \sqrt{3}$ である。この式の両辺について、符号はともに正であるから、それぞれ 2 乗して比較すると、

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 4 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + 1 \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta \geq \frac{1}{2}$$

とわかる。よって、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、求める θ の範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ である。

(答) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

(2)

$\vec{c}, \vec{d}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表すと、

$$\begin{cases} \vec{a} = 4\vec{c} - 3\vec{d} \\ \vec{b} = 3\vec{c} - 2\vec{d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} \\ \vec{d} = -3\vec{a} + 4\vec{b} \end{cases}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{d} &= (-2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} + 4\vec{b}) \\ &= 6|\vec{a}|^2 - 17\vec{a} \cdot \vec{b} + 12|\vec{b}|^2 \\ &= 36 - 17\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

と変形できる。(1)の結果より、 $\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq 1$ であるから、

$$1 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \leq 2$$

となる。したがって、内積 $\vec{c} \cdot \vec{d}$ の値の範囲は

$$2 \leq \vec{c} \cdot \vec{d} \leq 19$$

となる。

(答) $2 \leq \vec{c} \cdot \vec{d} \leq 19$

(1)

等式 $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ に $x = \omega$ を代入すると,

$$\begin{aligned}\omega^3 - 1 &= (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) \\ &= 0 \quad (\because \omega^2 + \omega + 1 = 0)\end{aligned}$$

とわかる。したがって、 $\omega^3 = 1$ である。

(証明終)

(2)

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$ が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned}(1 + \omega)^{3n} &= (-\omega^2)^{3n} \\ &= \{(-1)^3\}^n \cdot (\omega^3)^{2n} \\ &= (-1)^n \cdot 1^{2n} \\ &= (-1)^n\end{aligned}$$

と変形できる。

(証明終)

(3)

$n-1-k=j$ とおく。 $k=0, 1, \dots, n-1$ のとき $j=n-1, n-2, \dots, 0$ となることを踏まえると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3n-3k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3j+2} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+2}\end{aligned}$$

と変形できる。よって $\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+2} = 0$ である。また、二項定理より,

$$\begin{aligned}(1 + \omega)^{3n} &= \sum_{k=0}^{3n} {}_{3n}C_k \cdot \omega^k \\ &= \sum_{k=0}^n {}_{3n}C_{3k} \cdot \omega^{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} \cdot \omega^{3k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+2} \cdot \omega^{3k+2} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_{3n}C_{3k} + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} \cdot \omega + \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} \cdot \omega^2 \quad (\because \omega^3 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^n {}_{3n}C_{3k} + (\omega + \omega^2) \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n {}_{3n}C_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1}\end{aligned}$$

となる。これと(2)の結果より、 $\sum_{k=0}^n {}_{3n}C_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} = (-1)^n$ が導ける。

(証明終)

(1)

点Q, Rの座標をそれぞれ $Q(\alpha, \alpha^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$)とおく。 α, β は2次方程式

$x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0$ の異なる2つの実数解だから、この方程式は

$$x^2 - ax - b = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

と因数分解できる。このとき、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \alpha\beta = -b \end{cases}$$

が成り立つ。線分QRは放物線Cの上側に存在するから、 S は α, β を用いて、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(ax + b) - x^2\} dx \\ &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

と表せる。いま、

$$\begin{aligned} (\beta - \alpha)^2 &= (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta \\ &= a^2 + 4b \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(a^2 + 4b)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6}(\sqrt{a^2 + 4b})^3 \end{aligned}$$

となることがわかる。

(証明終)

(2)

点Q, RにおけるCの接線をそれぞれ ℓ_q, ℓ_r とおくと、これらの方程式は、

$$\begin{cases} \ell_q: y = 2\alpha x - \alpha^2 \\ \ell_r: y = 2\beta x - \beta^2 \end{cases}$$

と表せる。点Pは ℓ_q と ℓ_r の交点であるから、上の連立方程式を解き、座標を求めると、

$$P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta\right) \Leftrightarrow P\left(\frac{a}{2}, -b\right) \quad \dots \textcircled{1}$$

とわかる。また、点Pは円O: $x^2 + y^2 = 1$ 上の点であるから、

$$\frac{a^2}{4} + b^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成立している。ここで、点Pから放物線Cに接線が2本引けるための条件について、

点Pから放物線Cに接線が2本引ける

$\Leftrightarrow$ 2次方程式 $x^2 - ax - b = 0$ が異なる2つの実数解をもつ

$\Leftrightarrow$ 2次方程式の判別式が $a^2 + 4b > 0$ となる

と同値変形できる。②式より、 $a^2 = 4 - 4b^2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} -b^2 + b + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < b < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

とわかる。ここで、点Pは円O: $x^2 + y^2 = 1$ 上の点であるから、 $-1 \leq -b \leq 1$ である。したがって、条件を満たす b の変域は

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < b \leq 1$$

である。 $x^{\frac{3}{2}}$ は $x > 0$ で増加関数だから、 $S = \frac{1}{6}(\sqrt{a^2 + 4b})^3$ と $a^2 + 4b$ の増減は一致する。 $a^2 + 4b$

を調べると、②式より、

$$\begin{aligned} a^2 + 4b &= 4 - 4b^2 + 4b \\ &= 4\left\{-\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}\right\} \end{aligned}$$

と平方完成できる。 $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < b \leq 1$ より、これは $b = \frac{1}{2}$ のとき最大値5をとる。したがって、①

式より、点Pの y 座標が $-\frac{1}{2}$ となるとき、 S は最大値 $\frac{1}{6}(\sqrt{5})^3 = \frac{5\sqrt{5}}{6}$ をとる。

(答) 点Pの y 座標 $-\frac{1}{2}$, S の最大値 $\frac{5\sqrt{5}}{6}$

(1)

$g(x) = \log x - ax$ ($a > 0$) とおく。真数条件より $x > 0$ である。 $g(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x} - a \\ &= \frac{1-ax}{x} \end{aligned}$$

となるから、 $g(x)$ の増減は以下の通りとなる。

x	(0)	...	$\frac{1}{a}$	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		↗		↘

増減表より、 $g(x)$ は $x = \frac{1}{a}$ のとき最大値 $g\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a - 1$ をとる。

(答) $x = \frac{1}{a}$ のとき最大値 $-\log a - 1$

(2)

$$\int_1^e \frac{f(t)+1}{t} dt = a \quad (a \text{ は定数}) \quad \dots \textcircled{1}$$

とおくと、

$$f(x) = \log x - ax \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\{(\log x)^2\}' = 2 \log x \cdot \frac{1}{x}$ が成り立つことを考慮し、②式を①式へ代入すると、

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\log t - at + 1}{t} dt &= a \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} (\log t)^2 - at + \log t \right]_1^e &= a \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} - ae + 1 + a &= a \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3}{2e} \end{aligned}$$

と計算できる。これを②式に代入しすると、

$$f(x) = \log x - \frac{3}{2e}x$$

とわかる。ここで、(1)の結果より、 $f(x)$ は $x = \frac{1}{a}$ 、つまり $x = \frac{2e}{3}$ のとき最大値 $\log \frac{2e}{3} - 1$ をとる。

$\frac{2e}{3} < e$ より $\log \frac{2e}{3} < 1$ であるから、 $\log \frac{2e}{3} - 1 < 0$ である。したがって、 $f(x)$ は $x > 0$ において常に負の値をとることから、方程式 $f(x) = 0$ は実数解をもたない。

(答) $f(x) = \log x - \frac{3}{2e}x$

3 以上のある整数 n に対して、

$$A^n = O \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立っている。

(1)

背理法で証明する。すなわち、 A の逆行列 A^{-1} が存在すると仮定して矛盾を導く。①の両辺

に $(A^{-1})^n$ を左からかけると、 $E = O$ となり矛盾する。したがって、 A の逆行列は存在しない。

(証明終)

(2)

ハミルトン・ケーリーの定理より、

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

が成り立っている。(1)の結果より、 A は逆行列を持たないことから、

$$\det A = ad - bc = 0$$

である。したがって、 $A^2 = (a+d)A$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

ある3以上の自然数 n について、 $A^n = O$ が成り立つと仮定する。(2)の結果より、

$$A^2 = (a+d)A$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned} A^n &= A^2 A^{n-2} \\ &= (a+d) A^{n-1} \\ &= (a+d)^2 A^{n-2} \\ &= \dots \\ &= (a+d)^{n-1} A \end{aligned}$$

となる。このとき、 $A^n = O$ であるから、

$$(a+d)^{n-1} A = O$$

$$\Leftrightarrow (a+d)^{n-1} = 0 \quad \text{または} \quad A = O$$

である。

[1] $(a+d)^{n-1} = 0$ であるとき

$a+d=0$ であるから、

$$A^2 = (a+d)A = O$$

となる。

[2] $A=O$ であるとき

明らかに $A^2 = O^2 = O$ である。

以上[1],[2]より、 $A^2 = O$ となる。

(証明終)