



平成19年度 数 学

問 題 冊 子

注 意 事 項

1. 監督者の指示があるまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. この問題冊子は、6 ページに組んである。
教育学部および経済学部受験者は、設問 1 ～ 4 を解答すること。
システム工学部受験者は、設問 1 ～ 3, 5 ～ 6 を解答すること。
なお、落丁、乱丁および印刷不鮮明なところがあればすぐ申し出ること。
3. 解答用紙には、必ず本学の受験番号を、それぞれ 2 箇所ともに記入すること。
4. 解答は、問題番号に対応する解答用紙に記入すること。
5. 解答用紙の裏面は原則として使用しないこと。
6. 記入した解答用紙は、裏返しにして机上におくこと。
7. 解答用紙の中の※の欄には記入してはいけない。
8. 解答用紙の交換は原則として行わない。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1

〔全学部共通〕

次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、次の方程式を満たす θ の値を求めよ。

$$\sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos^2 \theta - 2\sqrt{2} \cos \theta = 0$$

- (2) 次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ。

$$2^{x \log_{0.5} x} \geq x^{-0.5}$$

2

〔全学部共通〕

ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が

$$|\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = 1, \quad |\vec{a} - \vec{b}| \leq \sqrt{3}$$

を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、 θ の値の範囲を求めよ。

ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

- (2) ベクトル $\vec{c}$, $\vec{d}$ が

$$\vec{a} = 4\vec{c} - 3\vec{d}, \quad \vec{b} = 3\vec{c} - 2\vec{d}$$

を満たすとき、内積 $\vec{c} \cdot \vec{d}$ の値の範囲を求めよ。

ω を $1 + \omega + \omega^2 = 0$ を満たす複素数とすると、次の問いに答えよ。ただし、 n は自然数とする。

(1) $\omega^3 = 1$ が成り立つことを示せ。

(2) $(1 + \omega)^{3n} = (-1)^n$ が成り立つことを示せ。

(3) 次の 2 つの等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+2} = 0$$

$$\sum_{k=0}^n {}_{3n}C_{3k} - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{3n}C_{3k+1} = (-1)^n$$

4

〔教育学部・経済学部共通〕(注：システム工学部受験者は解答しないこと)

座標平面上に，放物線 $C: y = x^2$ と円 $O: x^2 + y^2 = 1$ がある。

点 P は， P から放物線 C への接線が 2 本引けるという条件のもとで円 O 上を動く。

P から放物線 C へ接線を 2 本引き，接点をそれぞれ Q, R とする。

直線 QR と放物線 C で囲まれた領域の面積を S とする。

(1) 直線 QR の方程式を $y = ax + b$ とするとき，

$$S = \frac{1}{6} \left(\sqrt{a^2 + 4b} \right)^3$$

が成り立つことを示せ。

(2) S の最大値を求めよ。また， S がその値をとるときの点 P の y 座標を求めよ。

5

〔システム工学部〕(注：教育学部および経済学部受験者は解答しないこと)

次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数 $\log x$ の底とする。

(1) a を正の定数とする。 $\log x - ax$ の最大値を求めよ。

(2) 次の等式を満たす $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = \log x - x \int_1^e \frac{f(t) + 1}{t} dt$$

また、方程式 $f(x) = 0$ は実数解をもたないことを示せ。

6

〔システム工学部〕(注：教育学部および経済学部受験者は解答しないこと)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

3 以上のある整数 n に対して $A^n = O$ のとき、次の問いに答えよ。

- (1) A の逆行列は存在しないことを示せ。
- (2) $A^2 = (a + d)A$ が成り立つことを示せ。
- (3) $A^2 = O$ が成り立つことを示せ。