

任意の x について、真数条件は満たされている。また、

$$3\log_8 \frac{1}{1+|x|} = -\log_2 (1+|x|)$$

である。このことから、

$$\begin{aligned} \log_2 (1+|2-x|) - 3\log_8 \frac{1}{1+|x|} = 2 &\Leftrightarrow \log_2 (1+|2-x|)(1+|x|) = 2 \\ &\Leftrightarrow (1+|2-x|)(1+|x|) = 4 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(i) $x \geq 2$ のとき

①より

$$x^2 - 1 = 4$$

よって $x \geq 2$ であることを考慮して、

$$x = \sqrt{5}$$

(ii) $0 < x < 2$ のとき

①より

$$-x^2 + 2x + 3 = 4$$

よって

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

より

$$x = 1$$

これは、 $0 < x < 2$ を満たす。

(iii) $x \leq 0$ のとき

①より

$$x^2 - 4x + 3 = 4$$

よって

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

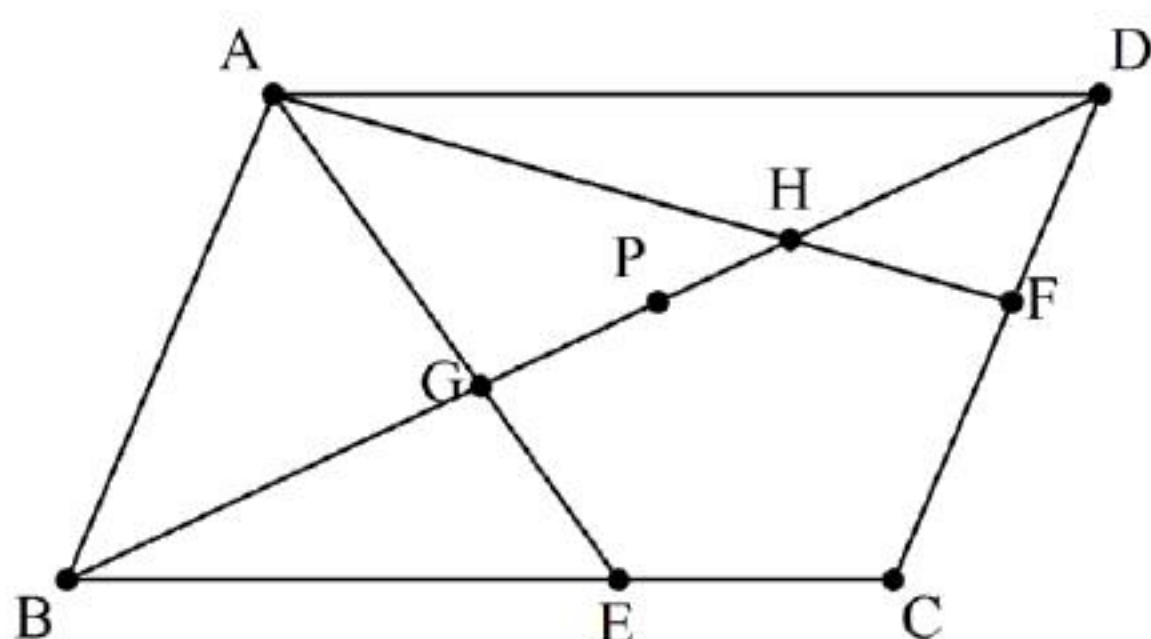
これより、 $x \leq 0$ であることを考慮して、

$$x = 2 - \sqrt{5}$$

以上から

$$x = \sqrt{5}, 1, 2 - \sqrt{5}$$

(答) $x = \sqrt{5}, 1, 2 - \sqrt{5}$



(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AE} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\
 &= \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AF} &= \frac{4}{7}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \\
 &= \frac{4}{7}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\
 &= \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\
 &= \frac{3}{7}\vec{b} + \vec{d}
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AE} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{7}\vec{b} + \vec{d}$$

(2)

$\overrightarrow{AG}$ は実数 k を用いて,

$$\overrightarrow{AG} = k \overrightarrow{AE}$$

と表されるので

$$\overrightarrow{AG} = k\vec{b} + \frac{2}{3}k\vec{d}$$

また, 点 G は辺 BD 上の点であるから, $\overrightarrow{AG}$ は実数 s を用いて,

$$\overrightarrow{AG} = s\vec{b} + (1-s)\vec{d}$$

とも表される。よって

$$\begin{cases} k=s \\ \frac{2}{3}k=1-s \end{cases}$$

これを解いて

$$k=s=\frac{3}{5}$$

となるので,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d}$$

同様に考えて, $\overrightarrow{AH}$ は実数 l を用いて,

$$\overrightarrow{AH} = l \overrightarrow{AF} = \frac{3}{7}l\vec{b} + l\vec{d}$$

と表され, 点 H は辺 BD 上の点であるから, 実数 t を用いて $\overrightarrow{AH}$ は,

$$\overrightarrow{AH} = t\vec{b} + (1-t)\vec{d}$$

とも表される。よって

$$\begin{cases} \frac{3}{7}l=t \\ l=1-t \end{cases}$$

より

$$t=\frac{3}{10}, l=\frac{7}{10}$$

となるので

$$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{7}{10}\vec{d}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d}, \quad \overrightarrow{AH} = \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{7}{10}\vec{d}$$

(3)

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\frac{3}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{d} \right) \cdot \vec{d} = \frac{3}{5}\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{2}{5}|\vec{d}|^2$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{10}\vec{b} + \frac{7}{10}\vec{d} \right) \cdot \vec{b} = \frac{3}{10}|\vec{b}|^2 + \frac{7}{10}\vec{b} \cdot \vec{d}$$

から, 題意の条件にこれらを代入して

$$\frac{3}{5}\vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{2}{5}|\vec{d}|^2 = \frac{3}{10}|\vec{b}|^2 + \frac{7}{10}\vec{b} \cdot \vec{d}$$

$$\Leftrightarrow 4|\vec{d}|^2 = 3|\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{d} \quad \dots \textcircled{2}$$

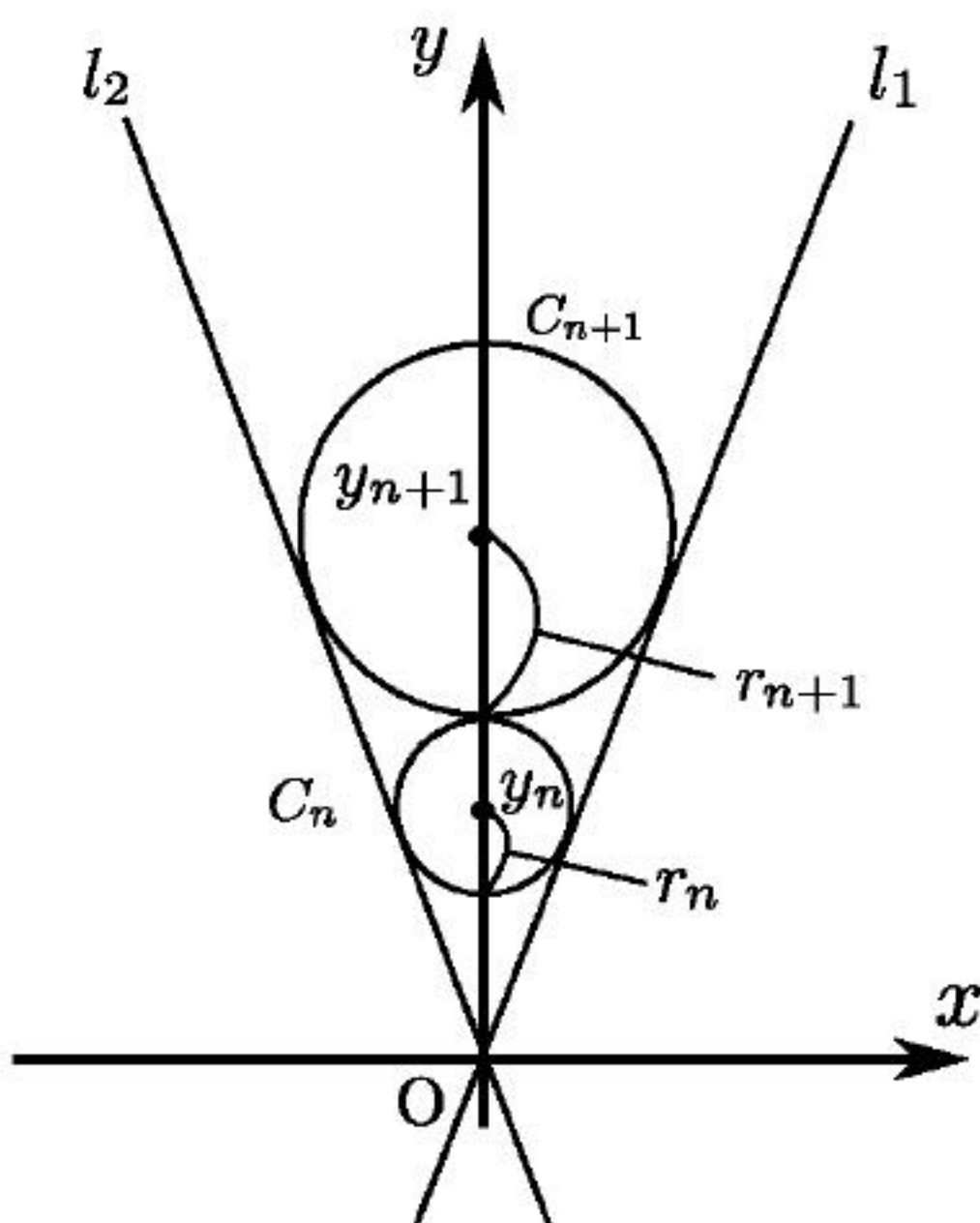
$\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BD} \neq \vec{0}$ なので, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ であれば $AP \perp BD$ である。

ここで, $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{d}$ と表せるので,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\frac{3}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{d} \right) \cdot (\vec{d} - \vec{b}) \\
 &= -\frac{3}{7}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{7}|\vec{d}|^2 - \frac{1}{7}\vec{b} \cdot \vec{d} \\
 &= \frac{1}{7} \left(3|\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{d} \right) - \frac{3}{7}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{7}\vec{b} \cdot \vec{d} \quad (\because \textcircled{2}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

よって, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ となるので, $AP \perp BD$ である

(証明終)



(1)

円 C_n の中心と直線 l_2 の距離が r_n である。よって点と直線の距離の公式より,

$$\frac{|\sqrt{3} \cdot 0 - y_n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = r_n \Leftrightarrow \frac{y_n}{2} = r_n \quad (y_n > 0 \text{ より})$$

よって,

$$\frac{r_n}{y_n} = \frac{1}{2}$$

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

C_n と C_{n+1} が接しているので, それぞれの円の中心同士の距離は $r_{n+1} + r_n$ である。このことから,

$$y_{n+1} - y_n = r_n + r_{n+1}$$

このことと(1)より,

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_{n+1} \Leftrightarrow y_{n+1} = 3y_n$$

よってこのことと, $y_1 = 1$ とあわせて

$$y_n = 3^{n-1}$$

(答) 3^{n-1}

(3)

$$r_n = \frac{1}{2}y_n = \frac{3^{n-1}}{2}$$

である。よって,

$$S_k = \pi r_k^2 = \frac{9^{k-1}}{4} \pi$$

と表されるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n 9^{k-1} \\ &= \frac{\pi}{4} \times \frac{9^n - 1}{9 - 1} \\ &= \frac{9^n - 1}{32} \pi \end{aligned}$$

(答) $\frac{9^n - 1}{32} \pi$

(1)

$$g(x) = (2x^3 - 8x^2 + 5x)' = 6x^2 - 16x + 5$$

であるから

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 6x^2 - 16x + 5 = 2x^2 - 8x + 5$$

これをとくと,

$$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 (\because x > 0)$$

よって

$$P(2, -3)$$

(答) $(2, -3)$

(2)

$$f'(x) = 4x - 8$$

であるから求める方程式は,

$$y = (4 \times 2 - 8)x - 3 = -3$$

(答) $y = -3$

(3)

下図斜線部分が求める部分である。よって求める面積は,

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x^2 - 8x + 5 + 3) dx &= \left[\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x \right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

(答) $\frac{16}{3}$

