

任意の x について、真数条件は満たされている。また、

$$3\log_8 \frac{1}{1+|x|} = -\log_2 (1+|x|)$$

である。このことから、

$$\begin{aligned} \log_2 (1+|2-x|) - 3\log_8 \frac{1}{1+|x|} = 2 &\Leftrightarrow \log_2 (1+|2-x|)(1+|x|) = 2 \\ &\Leftrightarrow (1+|2-x|)(1+|x|) = 4 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(i) $x \geq 2$ のとき

①より

$$x^2 - 1 = 4$$

よって $x \geq 2$ であることを考慮して、

$$x = \sqrt{5}$$

(ii) $0 < x < 2$ のとき

①より

$$-x^2 + 2x + 3 = 4$$

よって

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

より

$$x = 1$$

これは、 $0 < x < 2$ を満たす。

(iii) $x \leq 0$ のとき

①より

$$x^2 - 4x + 3 = 4$$

よって

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

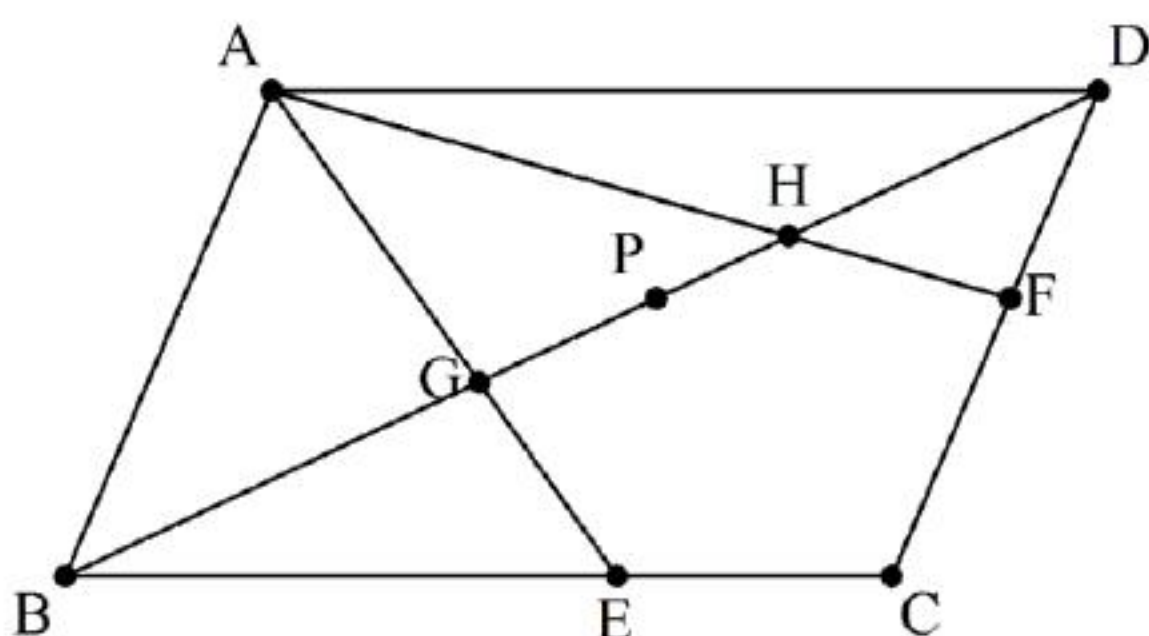
これより、 $x \leq 0$ であることを考慮して、

$$x = 2 - \sqrt{5}$$

以上から

$$x = \sqrt{5}, 1, 2 - \sqrt{5}$$

(答) $x = \sqrt{5}, 1, 2 - \sqrt{5}$



(1)

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} \\ &= \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}(\overline{AB} + \overline{AD}) \\ &= \overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD} \\ &= \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \frac{4}{7} \overrightarrow{AD} + \frac{3}{7} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{4}{7} \overrightarrow{AD} + \frac{3}{7} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{3}{7} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{3}{7} \vec{b} + \vec{d}\end{aligned}$$

(答) $\overrightarrow{AE} = \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{7}\vec{b} + \vec{d}$

(2)

$\overline{AG}$ は実数 k を用いて,

$$\overrightarrow{AG} = k \overrightarrow{AE}$$

と表されるので

$$\overline{AG} = k\overline{b} + \frac{2}{3}k\overline{d}$$

また、点 G は辺 BD 上の点であるから、 $\overline{AG}$ は実数 s を用いて、

$$\overrightarrow{AG} = s\overrightarrow{b} + (1-s)\overrightarrow{d}$$

とも表される。よって

$$\begin{cases} k=s \\ \frac{2}{3}k=1-s \end{cases}$$

これを解いて

$$k=s=\frac{3}{5}$$

となるので,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{d}$$

同様に考えて、 $\overline{AH}$ は実数 l を用いて、

$$\overrightarrow{AH} = l \overrightarrow{AF} = \frac{3}{7} l \overrightarrow{b} + l \overrightarrow{d}$$

と表され、点 H は辺 BD 上の点であるから、実数 t を用いて $\overline{AH}$ は、

$$\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{b} + (1-t)\overrightarrow{d}$$

とも表される。よって

$$\begin{cases} \frac{3}{7}l = t \\ l = 1 - t \end{cases}$$

より

$$t = \frac{3}{10}, l = \frac{7}{10}$$

となるので

$$\overrightarrow{AH} = \frac{3}{10} \overrightarrow{b} + \frac{7}{10} \overrightarrow{d}$$

(答) $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{b} + \frac{2}{5}\overrightarrow{d}$, $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{10}\overrightarrow{b} + \frac{7}{10}\overrightarrow{d}$

(3)

$$\overline{\mathbf{AG}} \cdot \overline{\mathbf{AD}} = \left(\frac{3}{5} \overline{\mathbf{b}} + \frac{2}{5} \overline{\mathbf{d}} \right) \cdot \overline{\mathbf{d}} = \frac{3}{5} \overline{\mathbf{b}} \cdot \overline{\mathbf{d}} + \frac{2}{5} |\overline{\mathbf{d}}|^2$$

$$\overline{AH} \cdot \overline{AB} = \left(\frac{3}{10} \overline{b} + \frac{7}{10} \overline{d} \right) \cdot \overline{b} = \frac{3}{10} |\overline{b}|^2 + \frac{7}{10} \overline{b} \cdot \overline{d}$$

から、題意の条件にこれらを代入して

$$\frac{3}{5} \vec{b} \cdot \vec{d} + \frac{2}{5} |\vec{d}|^2 = \frac{3}{10} |\vec{b}|^2 + \frac{7}{10} \vec{b} \cdot \vec{d}$$

$$\Leftrightarrow 4|\overline{d}|^2 = 3|\overline{b}|^2 + \overline{b} \cdot \overline{d} \quad \dots \textcircled{2}$$

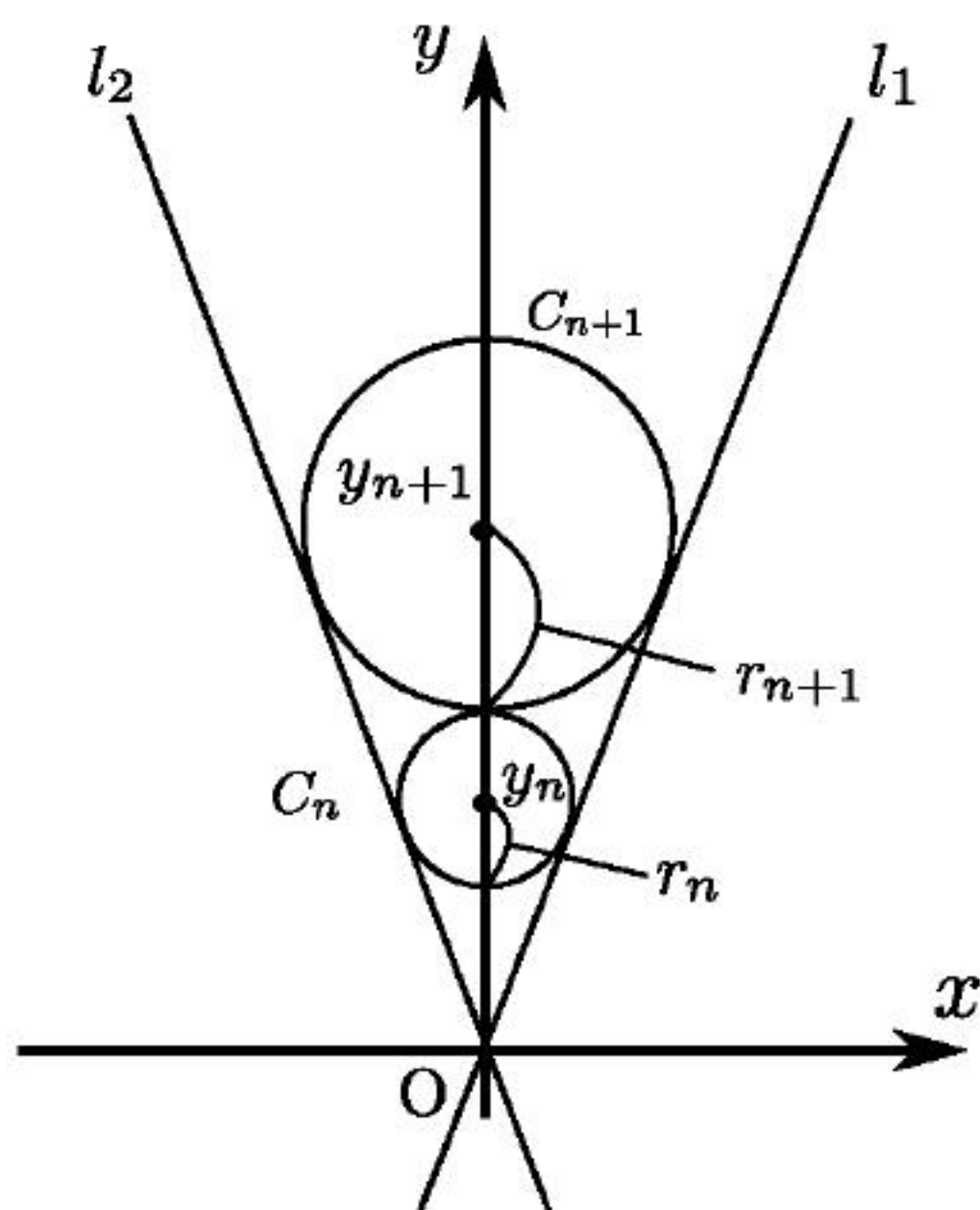
$\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BD} \neq \vec{0}$ なので、 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ であれば $AP \perp BD$ である。

ここで、 $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{b} + \frac{4}{7}\overrightarrow{d}$ と表せるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\frac{3}{7} \vec{b} + \frac{4}{7} \vec{d} \right) \cdot (\vec{d} - \vec{b}) \\ &= -\frac{3}{7} |\vec{b}|^2 + \frac{4}{7} |\vec{d}|^2 - \frac{1}{7} \vec{b} \cdot \vec{d} \\ &= \frac{1}{7} \left(3 |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{d} \right) - \frac{3}{7} |\vec{b}|^2 - \frac{1}{7} \vec{b} \cdot \vec{d} \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

よって、 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ となるので、 $AP \perp BD$ である

(証明終)



- (1) 円 C_n の中心と直線 l_2 の距離が r_n である。よって点と直線の距離の公式より、

$$\frac{|\sqrt{3} \cdot 0 - y_n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = r_n \Leftrightarrow \frac{y_n}{2} = r_n \quad (y_n > 0 \text{ より})$$

よって、

$$\frac{r_n}{y_n} = \frac{1}{2}$$

(答) $\frac{1}{2}$

- (2) C_n と C_{n+1} が接しているので、それぞれの円の中心同士の距離は $r_{n+1} + r_n$ である。このことから、

$$y_{n+1} - y_n = r_n + r_{n+1}$$

このことと(1)より、

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2} y_{n+1} \Leftrightarrow y_{n+1} = 3y_n$$

よってこのことと、 $y_1 = 1$ とあわせて

$$y_n = 3^{n-1}$$

(答) 3^{n-1}

- (3)

$$r_n = \frac{1}{2} y_n = \frac{3^{n-1}}{2}$$

である。よって、

$$S_k = \pi r_k^2 = \frac{9^{k-1}}{4} \pi$$

と表されるから

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n 9^{k-1} \\ &= \frac{\pi}{4} \times \frac{9^n - 1}{9 - 1} \\ &= \frac{9^n - 1}{32} \pi \end{aligned}$$

(答) $\frac{9^n - 1}{32} \pi$

(1)

$$(A+E)\left\{\frac{1}{3}(2E-A)\right\}=\left\{\frac{1}{3}(2E-A)\right\}(A+E)=E$$

を示せばよい。実際,

$$\begin{aligned}(A+E)\left\{\frac{1}{3}(2E-A)\right\} &= \frac{1}{3}(-A^2+A+2E) \\ &= \frac{1}{3}\{-(A-E)+A+2E\} \\ &= E\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{1}{3}(2E-A)\right\}(A+E)=\frac{1}{3}(-A^2+A+2E)=E$$

となるので, $(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(2E-A)$ が示された。

(証明終)

(2)

$$A^2=A-E$$

より,

$$A^3=A(A-E)=A^2-A=-E$$

である。よって,

$$\begin{aligned}B_n &= A^{3n+2} - 2A^{3n+1} + 3A^{3n} = (-1)^n(A^2 - 2A + 3E) \\ &= (-1)^n(A - E - 2A + 3E) \\ &= (-1)^n(2E - A) \\ &= 3(-1)^n(A+E)^{-1} \quad (\because (1) \text{ より})\end{aligned}$$

が成立するので

$$B_n^{-1} = \frac{(-1)^n}{3}(A+E)$$

となり, 題意が示された。

(証明終)

(1)

$$g(x) = x \tan x - 1$$

とおくと

$$g'(x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cos x + x}{\cos^2 x}$$

となり、 $0 < x < \frac{\pi}{3}$ において $\sin x, \cos x > 0$ が成り立つことから

$$g'(x) > 0$$

となるので、この範囲において $g(x)$ は単調増加関数である。

よってこのことと、

$$g(0) = -1 < 0, \quad g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 1 > 0$$

より、

中間値の定理から $0 < x < \frac{\pi}{3}$ にただ一つの実数解 α を持つことが示された。

また、

$$\alpha \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

が成立するので

$$\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}}{1+\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \cos^2 \alpha$$

よって

$$\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} = \cos^2 \alpha$$

となる。

(証明終)

(2)

$$f'(x) = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

であるから

$$f''(x) = \frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{\cos^4 x} = \frac{2 - \cos^2 x}{\cos^3 x} > 0 \quad (0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ より } \frac{1}{2} < \cos x < 1)$$

となることが示された。

(証明終)

(3)

接線 l の方程式は

$$y = \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} (x - \beta) + \frac{1}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} x - \frac{\beta \tan \beta - 1}{\cos \beta}$$

と表されるので、これが原点を通るとき

$$\beta \tan \beta - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。よって(1)より、 $0 < \beta < \frac{\pi}{3}$ でこのような β は存在し、

$$\frac{\beta^2}{1+\beta^2} = \cos^2 \beta$$

である。

また、回転体の体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_0^\beta \left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 dx - \frac{\pi}{\cos^2 \beta} \times \frac{\beta}{3} &= \pi [\tan x]_0^\beta - \frac{\pi \beta}{3 \cos^2 \beta} \\ &= \frac{3 \sin \beta \cos \beta - \beta}{3 \cos^2 \beta} \pi \end{aligned}$$

と表される。

ここで、①及び $0 < \beta < \frac{\pi}{3}$ から

$$\cos^2 \beta = \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$

が成り立ち、また、①を変形して

$$\beta \tan \beta - 1 = 0$$

$$\therefore \beta \frac{\sin \beta}{\cos \beta} - 1 = 0$$

$$\therefore \cos \beta = \beta \sin \beta$$

となることを利用して、

$$\begin{aligned} \frac{3 \sin \beta \cos \beta - \beta}{3 \cos^2 \beta} \pi &= \frac{1+\beta^2}{3\beta^2} (3\beta \sin^2 \beta - \beta) \pi \\ &= \frac{1+\beta^2}{3\beta^2} (3\beta(1 - \cos^2 \beta) - \beta) \pi \\ &= \frac{1+\beta^2}{3\beta^2} (2\beta - 3\beta \cos^2 \beta) \pi \\ &= \frac{1+\beta^2}{3\beta^2} \left(2\beta - \frac{3\beta^3}{1+\beta^2} \right) \pi \\ &= \frac{2-\beta^2}{3\beta} \pi \end{aligned}$$

となり、題意が示された。

(証明終)