

1

(1)

$$\begin{aligned}\cos x - \cos 2x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} &\leq \cos x \leq 1\end{aligned}$$

$-\pi \leq x < \pi$ より,

$$-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

となる。この x の範囲で,

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

のとりうる値の範囲を求めればよい。

$$-\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \pi$$

であるから,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

となり,

$$-\sqrt{3} \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$$

を得る。

(答) $-\sqrt{3} \leq \sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2$

(2)

真数条件より,

$$\begin{aligned}x > 0 \text{ かつ } 6 - x > 0 \\ \Leftrightarrow 0 < x < 6\end{aligned}$$

である。このもとで、与えられた不等式を解くと

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_2 (6 - x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x(6 - x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x(6 - x) &\geq 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq x &\leq 3 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。この x の範囲で,

$$\log_2 (1 + x) + \log_2 (7 - x) = \log_2 (-x^2 + 6x + 7)$$

のとりうる値の範囲を求めればよい。 $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ とおくと,

$$f'(x) = -2(x - 3)$$

より、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$3 - 2\sqrt{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$	$3 + 2\sqrt{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	8	$\nearrow$	16	$\searrow$	8

増減表より,

$$8 \leq -x^2 + 6x + 7 \leq 16$$

となる。よって,

$$\log_2 8 \leq \log_2 (-x^2 + 6x + 7) \leq \log_2 16$$

となり,

$$3 \leq \log_2 (-x^2 + 6x + 7) \leq 4$$

を得る。

(答) $3 \leq \log_2 (1 + x) + \log_2 (7 - x) \leq 4$

(1)

点(3,0)に到達する経路は、 x 軸方向に3回連続で動く経路の1通りである。

点(3,1)に到達するには、点(2,1)に到達した後、 x 軸方向に1回動けばよい。

よって、点(2,1)に到達する経路の数と同じであり

$${}_3C_1 = 3 \text{ 通り}$$

である。同様に、点(3,2)に到達する経路の数は、点(2,2)に到達する経路の数と同じであり、

$${}_4C_2 = 6 \text{ 通り}$$

である。

(答) 点(3,0) : 1通り, 点(3,1) : 3通り, 点(3,2) : 6通り

(2)

点Pの x 座標が3になる確率は、点Pが点(3,0),(3,1),(3,2), それぞれに到達する確率の和で

ある。さいころを1回投げたときに、点Pが x 軸方向に動く確率は $\frac{1}{3}$ であり、 y 軸方向に動

く確率は $\frac{2}{3}$ である。よって、

[1] 点(3,0)に到達する確率

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

[2] 点(3,1)に到達する確率

点(2,1)に到達する確率は

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

である。次に x 軸方向に動けばよいので、点(3,1)に到達する確率は

$$\frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

[3] 点(3,2)に到達する確率

[2]と同様に考えて、

$$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

以上より、求める確率は

$$\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81}$$

である。

(答) $\frac{17}{81}$

(3)

(2)と同様に考えて、点(0,3)に到達する経路は1通り、点(1,3)に到達する経路は3通り、点(2,3)に到達する経路は6通りである。

[1] 点(3,0)か(0,3)に到達するとき

経路の長さは3であり、その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

[2] 点(3,1)か(1,3)に到達するとき

経路の長さは4であり、その確率は

$$3 \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right\} = \frac{10}{27}$$

[3] 点(3,2)か(2,3)に到達するとき

経路の長さは5であり、その確率は

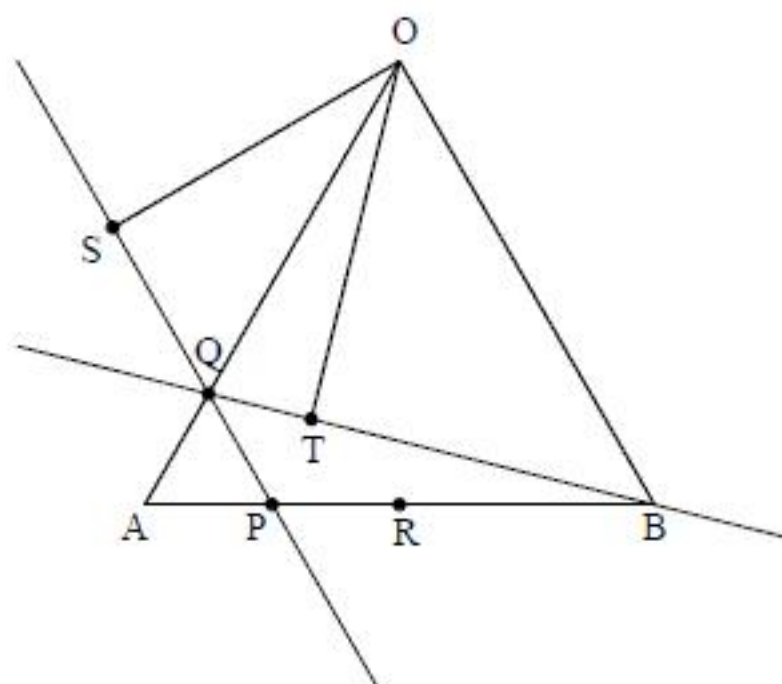
$$6 \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \right\} = \frac{8}{27}$$

以上より、求める期待値は

$$3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{10}{27} + 5 \times \frac{8}{27} = \frac{107}{27}$$

(答) $\frac{107}{27}$

(1)



点 T は直線 BQ 上にあるので, t を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= (1-t) \overrightarrow{OQ} + t \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{4}(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表される。条件より, $OT \perp BQ$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{BQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{3}{4}(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \right\} \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{16}(1-t)|\vec{a}|^2 + \frac{6t-3}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\textcircled{2} &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{16} - \frac{13}{16}t \right) |\vec{a}|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{3}{13} \quad (\because |\vec{a}| \neq 0)\end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると,

$$\overrightarrow{OT} = \frac{15}{26}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OT} = \frac{15}{26}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}$$

(2)

点 R は辺 AB の中点なので,

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

と表される。また, 点 S は直線 PQ 上にあるので, s を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= (1-s) \overrightarrow{OP} + s \overrightarrow{OQ} \\ &= (1-s) \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right) + \frac{3}{4}s\vec{a} \\ &= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}(1-s)\vec{b} \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

と表される。条件より, $OB \perp OS$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \left\{ \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}(1-s)\vec{b} \right\} &= 0\end{aligned}$$

となり, ③を用いると

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}s \right) |\vec{a}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow s = \frac{5}{2} \quad (\because |\vec{a}| \neq 0)\end{aligned}$$

となる。これを④に代入すると,

$$\overrightarrow{OS} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{b}$$

を得る。以上より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ST} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OS} \\ &= -\frac{9}{52}\vec{a} + \frac{63}{104}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} \\ &= -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{7}{8}\vec{b}\end{aligned}$$

となり,

$$\overrightarrow{ST} = \frac{9}{13}\overrightarrow{SR}$$

を得る。これより, 3 点 R, S, T が同一直線上にあることが示された。

(証明終)

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - (a+4)x + 4a \\ &= (x-a)(x-4) \end{aligned}$$

であるから,

$$|f(x) - g(x)| = (x-a)(x-4) \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$|f(x) - g(x)| = -(x-a)(x-4) \quad (a \leq x \leq 4)$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \int_0^4 |f(x) - g(x)| dx &= \int_0^a (x-a)(x-4) dx + \int_a^4 -(x-a)(x-4) dx \\ &= \int_0^a (x-a)(x-4) dx - \int_a^4 (x-a)(x-4) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+4}{2}x^2 + 4ax \right]_0^a - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{a+4}{2}x^2 + 4ax \right]_a^4 \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + 4a^2 - 8a + \frac{32}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$h(a) = -\frac{1}{3}a^3 + 4a^2 - 8a + \frac{32}{3}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} h'(a) &= -a^2 + 8a - 8 \\ &= -(a-4+2\sqrt{2})(a-4-2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

より, 次の増減表を得る。

a	0	...	$4-2\sqrt{2}$	...	4
$h'(a)$		-	0	+	
$h(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

増減表より, $h(a) = \int_0^4 |f(x) - g(x)| dx$ は, $a = 4 - 2\sqrt{2}$ のとき最小になる。

(答) $a = 4 - 2\sqrt{2}$