

(1)

$$\cos x - \cos 2x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1$$

$-\pi \leq x < \pi$ より,

$$-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$$

となる。この x の範囲で,

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

のとりうる値の範囲を求めればよい。

$$-\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \pi$$

であるから,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

となり,

$$-\sqrt{3} \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{3} \leq \sin x + \sqrt{3} \cos x \leq 2$$

(2)

真数条件より,

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad 6 - x > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 6$$

である。このもとで、与えられた不等式を解くと

$$\log_2 x + \log_2 (6 - x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(6 - x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(6 - x) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$$

となる。この x の範囲で,

$$\log_2 (1 + x) + \log_2 (7 - x) = \log_2 (-x^2 + 6x + 7)$$

のとりうる値の範囲を求めればよい。 $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ とおくと,

$$f'(x) = -2(x - 3)$$

より、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$3 - 2\sqrt{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$	$3 + 2\sqrt{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	8	$\nearrow$	16	$\searrow$	8

増減表より,

$$8 \leq -x^2 + 6x + 7 \leq 16$$

となる。よって,

$$\log_2 8 \leq \log_2 (-x^2 + 6x + 7) \leq \log_2 16$$

となり,

$$3 \leq \log_2 (-x^2 + 6x + 7) \leq 4$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad 3 \leq \log_2 (1 + x) + \log_2 (7 - x) \leq 4$$

(1)

点(3,0)に到達する経路は、 x 軸方向に3回連続で動く経路の1通りである。

点(3,1)に到達するには、点(2,1)に到達した後、 x 軸方向に1回動けばよい。

よって、点(2,1)に到達する経路の数と同じであり

$${}_3C_1 = 3 \text{ 通り}$$

である。同様に、点(3,2)に到達する経路の数は、点(2,2)に到達する経路の数と同じであり、

$${}_4C_2 = 6 \text{ 通り}$$

である。

(答) 点(3,0) : 1通り, 点(3,1) : 3通り, 点(3,2) : 6通り

(2)

点Pの x 座標が3になる確率は、点Pが点(3,0),(3,1),(3,2), それぞれに到達する確率の和で

ある。さいころを1回投げたときに、点Pが x 軸方向に動く確率は $\frac{1}{3}$ であり、 y 軸方向に動

く確率は $\frac{2}{3}$ である。よって、

[1] 点(3,0)に到達する確率

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

[2] 点(3,1)に到達する確率

点(2,1)に到達する確率は

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

である。次に x 軸方向に動けばよいので、点(3,1)に到達する確率は

$$\frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

[3] 点(3,2)に到達する確率

[2]と同様に考えて、

$$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$$

以上より、求める確率は

$$\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81}$$

である。

(答) $\frac{17}{81}$

(3)

(2)と同様に考えて、点(0,3)に到達する経路は1通り、点(1,3)に到達する経路は3通り、点(2,3)に到達する経路は6通りである。

[1] 点(3,0)か(0,3)に到達するとき

経路の長さは3であり、その確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

[2] 点(3,1)か(1,3)に到達するとき

経路の長さは4であり、その確率は

$$3 \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right\} = \frac{10}{27}$$

[3] 点(3,2)か(2,3)に到達するとき

経路の長さは5であり、その確率は

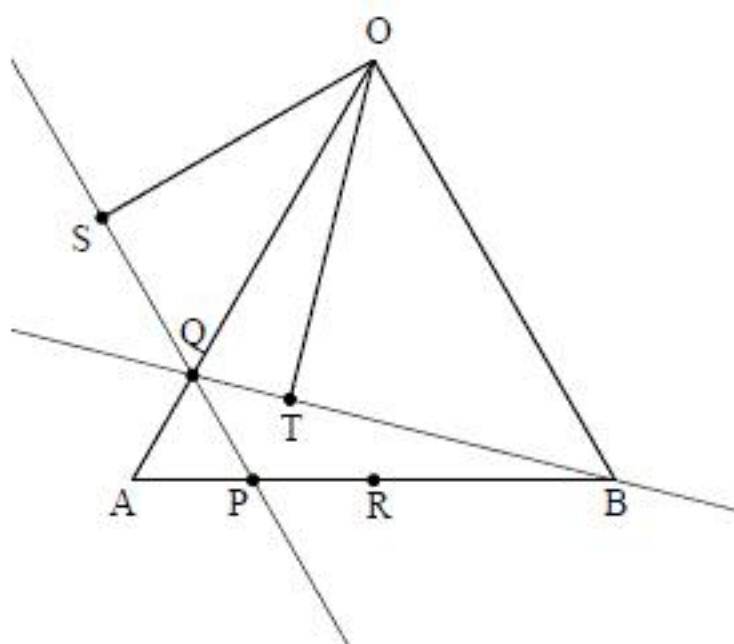
$$6 \times \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} \right\} = \frac{8}{27}$$

以上より、求める期待値は

$$3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{10}{27} + 5 \times \frac{8}{27} = \frac{107}{27}$$

(答) $\frac{107}{27}$

(1)



点 T は直線 BQ 上にあるので, t を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= (1-t) \overrightarrow{OQ} + t \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{4}(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表される。条件より, $OT \perp BQ$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{BQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ \frac{3}{4}(1-t)\vec{a} + t\vec{b} \right\} \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{a} - \vec{b} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{16}(1-t)|\vec{a}|^2 + \frac{6t-3}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2 &= 0 \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{16} - \frac{13}{16}t \right) |\vec{a}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t = \frac{3}{13} \quad (\because |\vec{a}| \neq 0)\end{aligned}$$

となる。これを①に代入すると,

$$\overrightarrow{OT} = \frac{15}{26}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OT} = \frac{15}{26}\vec{a} + \frac{3}{13}\vec{b}$$

(2)

点 R は辺 AB の中点なので,

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

と表される。また, 点 S は直線 PQ 上にあるので, s を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS} &= (1-s) \overrightarrow{OP} + s \overrightarrow{OQ} \\ &= (1-s) \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right) + \frac{3}{4}s\vec{a} \\ &= \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}(1-s)\vec{b} \quad \dots \textcircled{4}\end{aligned}$$

と表される。条件より, $OB \perp OS$ であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OS} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \left\{ \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}(1-s)\vec{b} \right\} &= 0\end{aligned}$$

となり, ③を用いると

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}s \right) |\vec{a}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow s = \frac{5}{2} \quad (\because |\vec{a}| \neq 0)\end{aligned}$$

となる。これを④に代入すると,

$$\overrightarrow{OS} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{3}{8}\vec{b}$$

を得る。以上より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ST} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OS} \\ &= -\frac{9}{52}\vec{a} + \frac{63}{104}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} \\ &= -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{7}{8}\vec{b}\end{aligned}$$

となり,

$$\overrightarrow{ST} = \frac{9}{13}\overrightarrow{SR}$$

を得る。これより, 3 点 R, S, T が同一直線上にあることが示された。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
 &= 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(答) 1

(2)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx &= [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \\
 &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \quad (\because (1))
 \end{aligned}$$

(答) $\frac{\pi^2}{4} - 2$

(3)

$$(x^2 + a \cos x)^2 = x^4 + 2ax^2 \cos x + a^2 \cos^2 x$$

より,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + a \cos x)^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 dx + 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx + a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\
 &= \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2a \left(\frac{\pi^2}{4} - 2 \right) + \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \quad (\because (2)) \\
 &= \frac{\pi^5}{160} + \left(\frac{\pi^2}{2} - 4 \right) a + \frac{1}{2} a^2 \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{4} a^2 + \left(\frac{\pi^2}{2} - 4 \right) a + \frac{\pi^5}{160} \\
 &= \frac{\pi}{4} \left(a + \frac{\pi^2 - 8}{\pi} \right)^2 + \frac{\pi^5}{160} - \frac{(\pi^2 - 8)^2}{4\pi}
 \end{aligned}$$

となる。これを最小にする a の値は

$$a = -\pi + \frac{8}{\pi}$$

である。

(答) $a = -\pi + \frac{8}{\pi}$

(1)

C 上の任意の点の座標を (p, q) とおくと、

$$\begin{aligned} p^2 - q^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow p^2 &= 1 + q^2 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。すると、点 P と (p, q) の距離の 2 乗は

$$\begin{aligned} p^2 + \left(q - \frac{2}{a}\right)^2 &= p^2 + q^2 - \frac{4}{a}q + \frac{4}{a^2} \\ &= 2q^2 - \frac{4}{a}q + \frac{4}{a^2} + 1 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 2\left(q - \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{2}{a^2} + 1 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表される。題意より、②を最小にするような (p, q) が点 Q である。 q は任意の実数を取り

得るので、 $q = \frac{1}{a}$ のとき②は最小になる。また、このとき①より

$$p^2 = 1 + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} \quad (\because a > 0, p > 0)$$

である。よって、点 Q の座標は $\left(\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}, \frac{1}{a}\right)$ である。また、直線 PQ の傾きは

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{a}\right) \div \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{点 } Q\left(\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}, \frac{1}{a}\right), \text{ 直線 } PQ \text{ の傾き } -\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

(2)

直線 $x = 0$ は C に接しないので、直線 RS は s を傾きとして

$$y = sx - a \quad \dots \textcircled{3}$$

とおける。これが

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

に接する条件を求める。③、④を連立して整理すると

$$\begin{aligned} x^2 - (sx - a)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (1 - s^2)x^2 + 2sax - a^2 - 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となる。これが重解を持てばよいので、判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} = 0 &\Leftrightarrow s^2 a^2 - (1 - s^2)(-a^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow s^2 = a^2 + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。(これは⑤の x^2 の係数を 0 にしないので適する。) このとき、

$$\textcircled{5} \Leftrightarrow (1 - s^2)\left(x + \frac{sa}{1 - s^2}\right)^2 = 0$$

となるので、接点 S の x 座標は $\frac{sa}{s^2 - 1}$ になるのだが、題意よりこれは正でなければならない。

これを満たす s は、

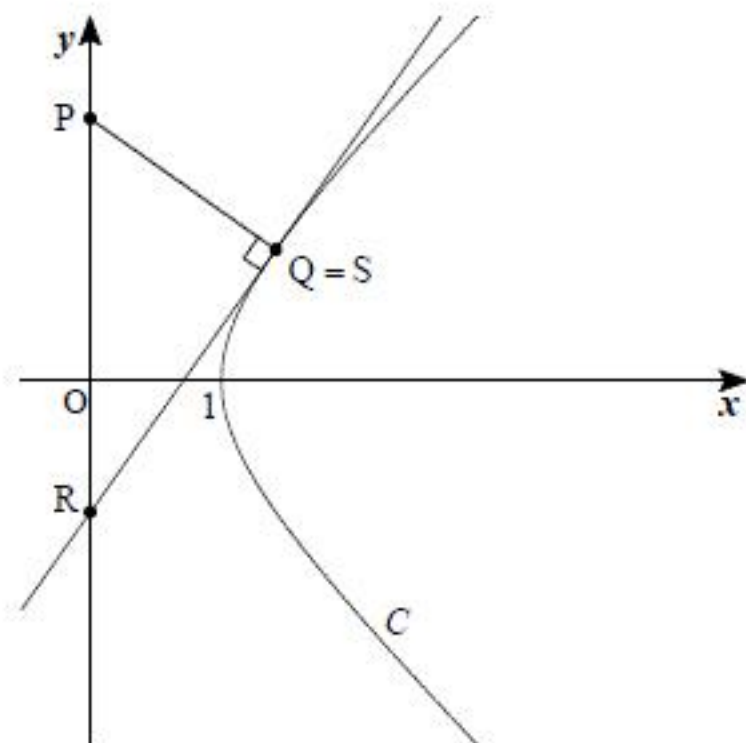
$$s = \sqrt{a^2 + 1}$$

であり、このとき S の座標は $\left(\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}, \frac{1}{a}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad \text{点 } S\left(\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}, \frac{1}{a}\right), \text{ 直線 } RS \text{ の傾き } \sqrt{a^2 + 1}$$

(3)

(1), (2)より 2 点 Q, S は一致する。また、直線 PQ の傾きと直線 RS の傾きの積が -1 なので、これらは直交する。



よって、3 点 P, Q, R を通る円の直径は線分 PR であり、その長さは

$$\frac{2}{a} - (-a) = \frac{2}{a} + a$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{a} + a$$