

(1)

$$\begin{aligned}
 \sin 3\theta &= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \\
 &= \frac{3}{5} - 4 \cdot \frac{1}{5^3} \\
 &= \frac{71}{125}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \sin 3\theta = \frac{71}{125}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 -2\sin 3x - \cos 2x + 3\sin x + 1 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow -2(3\sin x - 4\sin^3 x) - (1 - 2\sin^2 x) + 3\sin x + 1 &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow 8\sin^3 x + 2\sin^2 x - 3\sin x &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1)(4\sin x + 3) &\leq 0 \\
 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{3}{4}, \quad 0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

である。 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、これをみたす x の値は

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{または} \quad \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$$

(1)

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = -\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = -\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{c})$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \dots \textcircled{1}$$

右側の等号より $|\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2$ である。また、 $|\vec{a}|, |\vec{c}| > 0$ である。よって

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \quad \dots \textcircled{2}$$

である。次に、①の左側の等号より

$$|\vec{a}|^2 = 2\vec{a} \cdot \vec{c} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。これと②より

$$|\vec{a}||\vec{c}| = 2\vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{c}| = 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos \angle AOC$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle AOC = \frac{1}{2}$$

である。 $\angle AOC$ は平行四辺形の内角であることから、 $0 < \angle AOC < \pi$ なので、上式より

$$\angle AOC = \frac{\pi}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad |\vec{c}| = |\vec{a}|, \quad \angle AOC = \frac{\pi}{3}$$

(2)

四角形 OABC は平行四辺形なので

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} = \vec{a}$$

である。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \\ &= (\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{OC} \\ &= \vec{a} + (m-1)\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= (\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{CB}) \\ &= m\vec{a} + \vec{c} \end{aligned}$$

となる。これらを用いると、 $CD \perp OE$ となる条件は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{\vec{a} + (m-1)\vec{c}\} \cdot \{m\vec{a} + \vec{c}\} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m|\vec{a}|^2 + (m^2 - m + 1)\vec{a} \cdot \vec{c} + (m-1)|\vec{c}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

である。②と③を④に代入すると

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})\{2m + m^2 - m + 1 + 2(m-1)\} = 0$$

となる。(1)の答より、 $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ なので

$$\begin{aligned} 2m + m^2 - m + 1 + 2(m-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 + 3m - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

である。ここで $0 < m < 1$ なので、 $3 < \sqrt{13} < 4$ に注意して、

$$m = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad m = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$$

(1)

[1] n が奇数のとき m を正の整数として $n = 2m - 1$ とおくことができて

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{10(2m-1)+3(-1)^{2m-1}-5}{2} \\
 &= \frac{10(2m-1)-3-5}{2} \\
 &= 10m-9 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

である。 $1 \leq m$ なので、上式より

$$1 \leq a_n \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また

$$a_n = 2(5m-5)+1$$

であり、 $5m-5$ は整数であるから、 a_n は奇数である。これと②より、 a_n は正の奇数である。[2] n が偶数のとき m を正の整数として $n = 2m$ とおくことができて

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{10 \cdot 2m + 3(-1)^{2m} - 5}{2} \\
 &= \frac{20m + 3 - 5}{2} \\
 &= 10m - 1 \quad \dots \textcircled{3}
 \end{aligned}$$

である。 $1 \leq m$ なので、上式より

$$9 \leq a_n \quad \dots \textcircled{4}$$

である。また

$$a_n = 2(5m-1)+1$$

であり、 $5m-1$ は整数であるから、 a_n は奇数である。これと④より、 a_n は正の奇数である。以上、[1], [2] より、 a_n が正の奇数であることが示された。

(証明終)

(2)

[1] n が奇数のとき m を正の整数として $n = 2m - 1$ とおくと、①より

$$a_n = 5(2m-2)+1$$

であり、 $2m-2$ は整数であるから、 a_n を 5 で割った余りは 1 である。[2] n が偶数のとき m を正の整数として $n = 2m$ とおくと、③より

$$a_n = 5(2m-1)+4$$

であり、 $2m-1$ は整数であるから、 a_n を 5 で割った余りは 4 である。以上、[1], [2] より、 a_n を 5 で割った余りは 1 または 4 であることが示された。

(証明終)

(3)

①, ③より a_n は 10 で割って 1 または 9 余る数である。また、 $a_1 = 1$ であり、正の整数に対し

$$a_{2m-1} < a_{2m} < a_{2m+1}$$

が成り立つから、数列 $\{a_n\}$ は正の整数のうち、1 または 9 余るものすべてを小さい順に並べた数列である。よって、正の奇数のうち 5 で割った余りが 1 または 4 である数の集合と 10 で割って 1 または 9 余る数の集合が等しいことを示せばよい。5 で割って 1 または 4 余る数は k を 0 以上の整数として

$$5k+1, 5k+4$$

の形で表せる。 $k = 2k'$ を代入すると

$$10k'+1, 10k'+4$$

となり $k = 2k'+1$ を代入すると

$$10k'+6, 10k'+9$$

となる。このうち奇数であるのは $10k'+1, 10k'+9$ である。従って正の奇数のうち 5 で割った余りが 1 または 4 であるものの集合は 10 で割った余りが 1 または 9 であるものの集合に等しい。従って、 $\{a_n\}$ は 5 で割った余りが 1 または 4 である数を小さい順に並べた数列であることが示された。

(証明終)

(1)

$y' = x$ なので P, Q での接線の方程式はそれぞれ

$$y = 2p(x - 2p) + 2p^2 \Leftrightarrow y = 2px - 2p^2$$

$$y = 2q(x - 2q) + 2q^2 \Leftrightarrow y = 2qx - 2q^2$$

である。ここで 2 接線の交点について

$$2px - 2p^2 = 2qx - 2q^2$$

$$\Leftrightarrow (p - q)x = p^2 - q^2$$

であり、 $p < q$ より両辺を $p - q$ で割ることができて

$$x = p + q$$

となる。従って $\alpha = p + q$ である。接線の方程式に $x = \alpha$ を代入すると

$$y = 2p\alpha - 2p^2$$

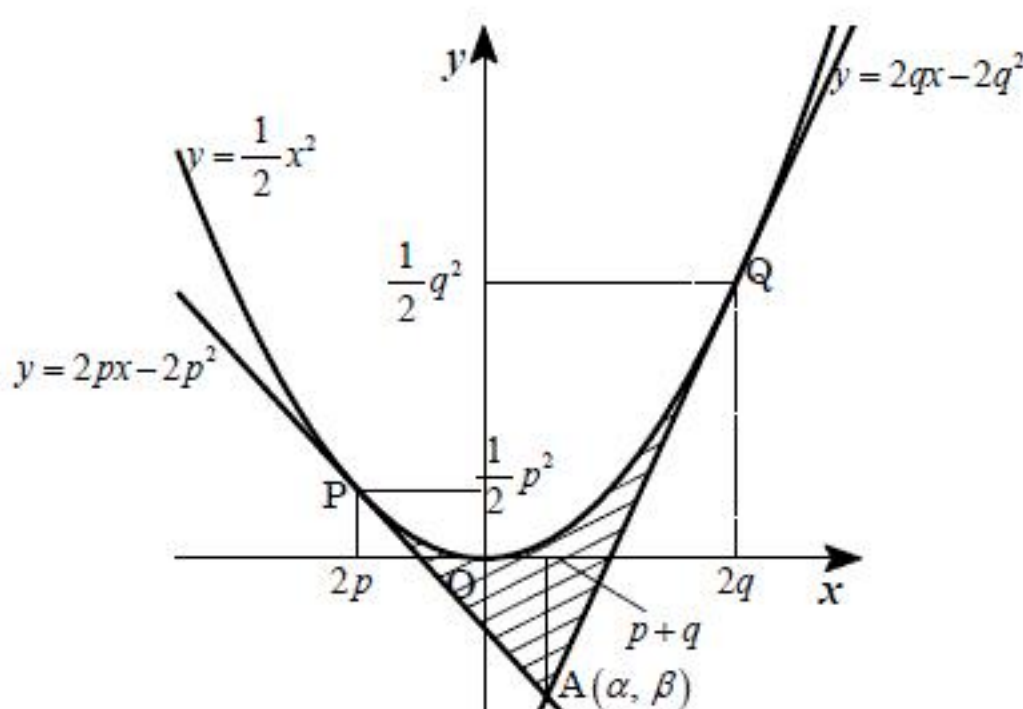
$$= 2p(p + q) - 2p^2$$

$$= 2pq$$

となるので $\beta = 2pq$ である。

(答) $\alpha = p + q, \beta = 2pq$

(2)



S は上図斜線部の図形の面積なので

$$\begin{aligned} S &= \int_{2p}^{p+q} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2px + 2p^2 \right) dx + \int_{p+q}^{2q} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2qx + 2q^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{2p}^{p+q} (x - 2p)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{p+q}^{2q} (x - 2q)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x - 2p)^3 \right]_{2p}^{p+q} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(x - 2q)^3 \right]_{p+q}^{2q} \\ &= \frac{1}{3}(q - p)^3 \end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{1}{3}(q - p)^3$

(3)

$$S = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(q - p)^3 = 9$$

$$\Leftrightarrow q - p = 3$$

$$\Leftrightarrow q = p + 3$$

である。 $PA \perp QA$ のとき 2 接線 PA, QA の傾きについて $2p \cdot 2q = -1$ が成立する。上式より

$$4p(p + 3) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4p^2 + 12p + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

である。従って、

$$(p, q) = \left(\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}, \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2} \right) \text{ (複号同順)}$$

となるので

$$(\alpha, \beta) = \left(\pm 2\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

である。

(答) $(\alpha, \beta) = \left(\pm 2\sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right)$

(1)

$$\begin{aligned}
 A^2 - 10A &= A(A - 10E) \\
 &= \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -8 & -3 & -8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ -8 & -13 & -8 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \\
 &= -9E
 \end{aligned}$$

より、示された。

(証明終)

(2)

(1)より、 A は逆行列、 A^{-1} をもち、

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}(A - 10E)$$

である。これを

$$AB = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -18 \\ 5 & -1 & 18 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

の両辺に左からかけると

$$\begin{aligned}
 B &= A^{-1} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -18 \\ 5 & -1 & 18 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{9}(A - 10E) \begin{pmatrix} -3 & 4 & -18 \\ 5 & -1 & 18 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ -8 & -13 & -8 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & -18 \\ 5 & -1 & 18 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$