

(1)

$\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の階差数列であるため、

$$\begin{cases} a_3 = a_1 + b_1 + b_2 \\ a_5 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \end{cases}$$

である。 $a_1 = -15$, $a_3 = -33$, $a_5 = -35$ より、

$$\begin{cases} -33 = -15 + b_1 + b_2 \\ -35 = -15 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = -18 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = -20 \end{cases}$$

となる。ここで、 $\{b_n\}$ は等差数列であるため、 $\{b_n\}$ の公差を d とすれば、

$$b_2 = b_1 + d, b_3 = b_1 + 2d, b_4 = b_1 + 3d$$

である。よって、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} b_1 + b_2 = -18 \\ b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = -20 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 + (b_1 + d) = -18 \\ b_1 + (b_1 + d) + (b_1 + 2d) + (b_1 + 3d) = -20 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 + d = -18 \\ 2b_1 + 3d = -20 \end{cases} \\ & \therefore (b_1, d) = (-11, 4) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\{b_n\}$ は初項 -11 、公差 4 の等差数列であり、一般項は

$$\begin{aligned} b_n &= -11 + 4(n-1) \\ &= 4n - 15 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $n \geq 2$ に対して、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -15 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 15) \\ &= -15 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 15(n-1) \\ &= 2n^2 - 17n \end{aligned}$$

となり、これは $n=1$ のときも成り立つ。以上より、 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項は、

$$\begin{cases} a_n = 2n^2 - 17n \\ b_n = 4n - 15 \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} a_n = 2n^2 - 17n \\ b_n = 4n - 15 \end{cases}$$

(2)

$a_n = 2n^2 - 17n$ より、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^n (2k^2 - 17k) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 17 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(4n-49) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1}{6} n(n+1)(4n-49)$$

(3)

$a_n = 2n^2 - 17n = 2n \left(n - \frac{17}{2} \right)$ より、

$$1 \leq n \leq 8 \text{ のとき, } a_n < 0$$

$$n \geq 9 \text{ のとき, } a_n > 0$$

である。また、

$$S_n - S_{n-1} = a_n \quad (n \geq 2)$$

であるため、

$$2 \leq n \leq 8 \text{ のとき, } S_n < S_{n-1}$$

$$n \geq 9 \text{ のとき, } S_n > S_{n-1}$$

となる。したがって、 S_n が最小となる n の値は 8 である。

$$(\text{答}) \quad n = 8$$

(1)

三角関数の加法定理より、実数 α, β に対して、

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{cases}$$

が成り立つ。したがって、

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)で示した等式に $\alpha = 2k\theta, \beta = \theta$ を代入すると、自然数 k に対して、

$$\begin{aligned} 2 \cos 2k\theta \sin \theta &= \sin(2k\theta + \theta) - \sin(2k\theta - \theta) \\ &= \sin(2k+1)\theta - \sin(2k-1)\theta \end{aligned}$$

となる。したがって、自然数 n に対して、

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \cos 2k\theta \sin \theta &= \sum_{k=1}^n \{ \sin(2k+1)\theta - \sin(2k-1)\theta \} \\ &= \sum_{k=1}^n [\sin(2k+1)\theta - \sin\{2(k-1)+1\}\theta] \\ &= \sin(2n+1)\theta - \sin\{2(1-1)+1\}\theta \\ &= \sin(2n+1)\theta - \sin \theta \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

(2)で示した等式に $\theta = \frac{\pi}{4n}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} \sin \frac{\pi}{4n} &= \sin \frac{2n+1}{4n} \pi - \sin \frac{\pi}{4n} \\ \Leftrightarrow \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{4n} &= \sin \frac{2n+1}{4n} \pi \\ \Leftrightarrow \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{4n} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4n} \right) \\ \therefore \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{4n} &= \cos \frac{\pi}{4n} \end{aligned}$$

となる。ここで、 n は自然数であるため、 $0 < \frac{\pi}{4n} < \frac{\pi}{2}$ となる。よって、 $\sin \frac{\pi}{4n} > 0, \cos \frac{\pi}{4n} > 0$

となるため、 $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} \neq 0$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n} \right) \sin \frac{\pi}{4n} &= \cos \frac{\pi}{4n} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{4n}}{\cos \frac{\pi}{4n}} &= \frac{1}{1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n}} \\ \therefore \tan \frac{\pi}{4n} &= \frac{1}{1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n}} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)

円 C_1 の中心 P の座標は $(2a, 0)$ であり、放物線 C_2 の頂点 Q の座標は $(0, 1)$ である。したがって $R(X, Y)$ とすれば、 X, Y は

$$\begin{aligned} PR^2 - QR^2 &= a^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \{(X-2a)^2 + Y^2\} - \{X^2 + (Y-1)^2\} &= a^2 - 1 \\ \Leftrightarrow -4aX + 4a^2 + 2Y - 1 &= a^2 - 1 \\ \therefore Y &= 2aX - \frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

を満たす。したがって、点 R の軌跡 C_3 を表す方程式は、

$$y = 2ax - \frac{3}{2}a^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = 2ax - \frac{3}{2}a^2$$

(2)

円 C_1 と直線 C_3 が共有点をもつための条件は、円 C_1 の中心 $(2a, 0)$ と直線 C_3 の距離が、円 C_1 の半径以下となることであるため、

$$\begin{aligned} \frac{\left|4a^2 - \frac{3}{2}a^2\right|}{\sqrt{4a^2 + 1}} &\leq a \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}a^2 &\leq a\sqrt{4a^2 + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}a &\leq \sqrt{4a^2 + 1} \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}a\right)^2 &\leq 4a^2 + 1 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow a^2 &\leq \frac{4}{9} \\ \therefore 0 < a &\leq \frac{2}{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。また、放物線 C_2 と直線 C_3 が共有点をもたないための条件は、 x の 2 次方程式

$$\begin{aligned} \frac{2}{5a^2}x^2 + 1 &= 2ax - \frac{3}{2}a^2 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5a^2}x^2 - 2ax + \left(1 + \frac{3}{2}a^2\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 20a^3x + 5a^2(3a^2 + 2) &= 0 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

が実数解をもたないことである。この 2 次方程式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (10a^3)^2 - 4 \cdot 5a^2(3a^2 + 2) \\ &= 20a^2(5a^2 + 2)(a^2 - 1) \end{aligned}$$

となるため、放物線 C_2 と直線 C_3 が共有点をもたないための条件は、

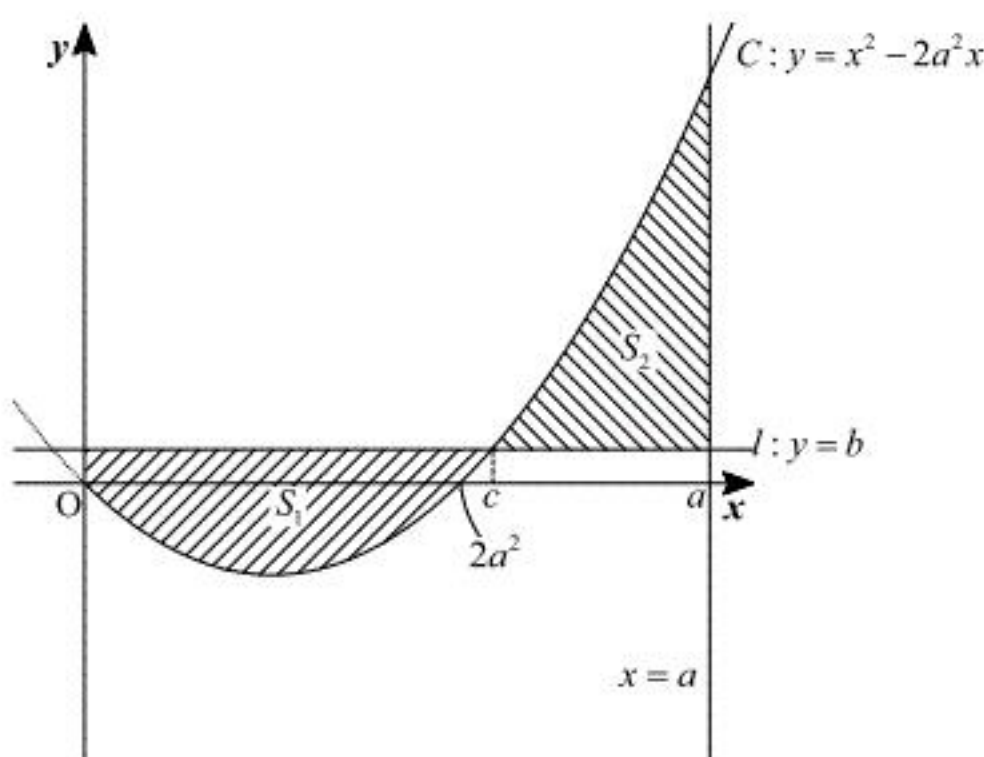
$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &< 0 \\ \Leftrightarrow 20a^2(5a^2 + 2)(a^2 - 1) &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 1 &< 0 \quad (\because a^2 > 0, 5a^2 + 2 > 0) \\ \therefore 0 < a &< 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。以上より、 $0 < a \leq \frac{2}{3}$ が成り立つとき、 $0 < a < 1$ も成り立つため、 C_1 と C_3 が共有点をもつとき、 C_2 と C_3 は共有点をもたない。

(証明終)

(1)

$0 < x < a$ における C と l の交点の x 座標を c 、 C と l と y 軸で囲まれる部分の面積を S_1 、 C と l と直線 $x=a$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。 $0 < a < \frac{1}{3}$ のとき、 $0 < 2a^2 < a$ となるため、 C, l の位置関係は下図のようになる。



上図より、

$$S_1 = \int_0^c (b - x^2 + 2a^2x) dx = -\int_0^c (x^2 - 2a^2x - b) dx$$

$$S_2 = \int_c^a (x^2 - 2a^2x - b) dx$$

となる。ここで、 $S_1 = S_2$ となるため、

$$S_1 = S_2$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^c (x^2 - 2a^2x - b) dx = \int_c^a (x^2 - 2a^2x - b) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^a (x^2 - 2a^2x - b) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 - a^2x^2 - bx \right]_0^a = 0$$

$$\Leftrightarrow a \left(\frac{1}{3}a^2 - a^3 - b \right) = 0$$

$$\therefore b = -a^3 + \frac{1}{3}a^2 \quad (\because a > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b = -a^3 + \frac{1}{3}a^2$$

(2)

$b = -a^3 + \frac{1}{3}a^2$ を a で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{db}{da} &= -3a^2 + \frac{2}{3}a \\ &= -3a \left(a - \frac{2}{9} \right) \end{aligned}$$

となるため、 $a > 0$ における b の増減表は以下の通りである。

a	(0)	...	$\frac{2}{9}$	...
$\frac{db}{da}$	(0)	+	0	-
b	(0)	↗	$\frac{4}{729}$	↘

以上より、 b は $a = \frac{2}{9}$ のとき、最大値 $\frac{4}{729}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad b \text{の最大値: } \frac{4}{729}, \text{ そのときの } a \text{の値: } \frac{2}{9}$$

5

(1)

$f(x) = xe^{-x^2}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2xe^{-x^2}) \\ &= (1 - 2x^2)e^{-x^2} \end{aligned}$$

である。よって、接線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (1 - 2t^2)e^{-t^2}(x-t) + te^{-t^2} \\ &= (1 - 2t^2)e^{-t^2}x + 2t^3e^{-t^2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 l と x 軸の交点の x 座標を $g(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - 2t^2)e^{-t^2}g(t) + 2t^3e^{-t^2} \\ \Leftrightarrow (2t^2 - 1)e^{-t^2}g(t) &= 2t^3e^{-t^2} \\ \Leftrightarrow (2t^2 - 1)g(t) &= 2t^3 \quad (\because e^{-t^2} > 0) \\ \therefore g(t) &= \frac{2t^3}{2t^2 - 1} = t + \frac{t}{2t^2 - 1} \quad (\because t > 1) \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 1 + \frac{1 \cdot (2t^2 - 1) - t \cdot 4t}{(2t^2 - 1)^2} \\ &= \frac{4t^2 \left(t + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{6}}{2} \right)}{(2t^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $t > 1$ における $g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	(1)	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$	(2)	$\searrow$	極小 $\frac{3\sqrt{6}}{4}$	$\nearrow$

以上より、 $t > 1$ の範囲で l と x 軸の交点の x 座標を最小にする t の値 t_0 は $t_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ である。

(答) $t_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)

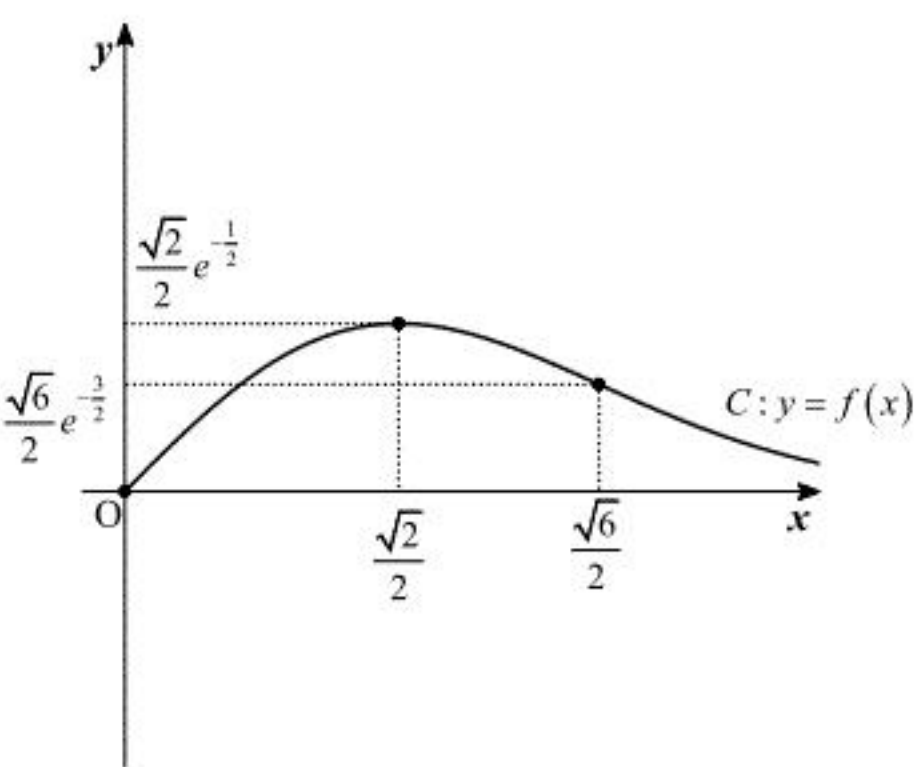
$$f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} = -2 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) e^{-x^2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4x \cdot e^{-x^2} + (1 - 2x^2) \cdot (-2xe^{-x^2}) \\ &= 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2} \\ &= 4x \left(x - \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) e^{-x^2} \end{aligned}$$

である。したがって、 $x > 0$ における $f(x)$ の増減・凹凸は次の表のようになる。

x	(0)	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...
$f'(x)$		+	0	-		-
$f''(x)$		-		-	0	+
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	極大 $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	変曲点 $\frac{\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$

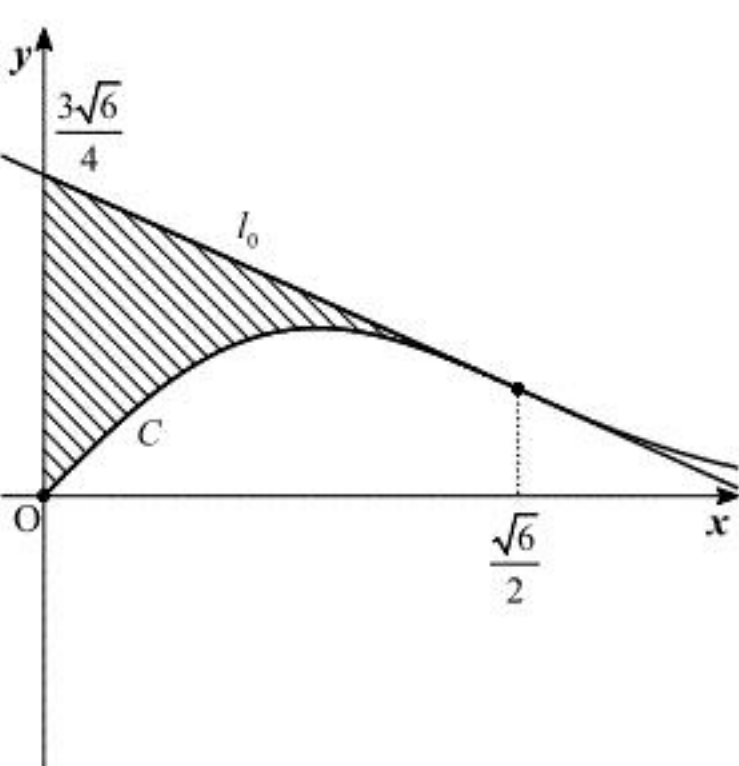
$0 < x < t_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ において、 $f''(x) < 0$ であるため、曲線 $C: y = f(x)$ は $0 < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$ において上に凸である。なお、曲線 C のグラフは下図のようになる。



(証明終)

(3)

C と l_0 と y 軸で囲まれる部分は、下図の斜線部である。(2)より、 $0 < x < \frac{\sqrt{6}}{2}$ において、 C と l_0 は交点をもたないことがわかる。



また、 $t_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$ より、 l_0 の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left\{ 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \right\} e^{-\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2} x + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 \cdot e^{-\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2} \\ &= -2e^{-\frac{3}{2}}x + \frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \left(-2e^{-\frac{3}{2}}x + \frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}} - xe^{-x^2} \right) dx \\ &= \left[-e^{-\frac{3}{2}}x^2 + \frac{3\sqrt{6}}{2}e^{-\frac{3}{2}}x + \frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}} \\ &= \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}e^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}} \right) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2}e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{7}{2}e^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ の行列式は

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \cdot b - a \cdot a \\ &= 3b - a^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ の逆行列の有無により場合分けをする。

[1] A が逆行列をもつとき

このとき、

$$\begin{aligned} \det A &\neq 0 \\ \Leftrightarrow 3b - a^2 &\neq 0 \end{aligned}$$

である。また、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (3+b)A + (3b-a^2)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= (b+3)A - (3b-a^2)E \end{aligned}$$

である。ここで、 $A^4 - 2A^3 - 3A^2 = O$ であるため、両辺に A^{-1} を 2 回かけて、

$$\begin{aligned} A^2 - 2A - 3E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= 2A + 3E \end{aligned}$$

となるため、上述の 2 式より、

$$\begin{aligned} (b+3)A - (3b-a^2)E &= 2A + 3E \\ \Leftrightarrow (b+1)A &= (3b-a^2+3)E \end{aligned}$$

となる。

[i] $b+1=0$ のとき

$b=-1$ であり、 $3b-a^2+3=0$ より、 $a=0$ となる。 $(a, b)=(0, -1)$ は $3b-a^2 \neq 0$ を満たす。

[ii] $b+1 \neq 0$ のとき

このとき、

$$A = \frac{3b-a^2+3}{b+1}E$$

となって、 A は単位行列の定数倍となるため、 A の形より、 $(a, b)=(0, 3)$ である。このとき、 $A=3E$ となり、また、 $(a, b)=(0, 3)$ は $3b-a^2 \neq 0$ を満たす。

以上、[i], [ii] より、[1] の場合、求める実数の組は $(a, b)=(0, -1), (0, 3)$ である。

[2] A が逆行列をもたないとき

このとき、

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \\ \Leftrightarrow 3b - a^2 &= 0 \end{aligned}$$

である。また、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{aligned} A^2 - (3+b)A + (3b-a^2)E &= O \\ \therefore A^2 &= (b+3)A \quad (\because 3b-a^2=0) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= (b+3)A^2 \\ &= (b+3)^2 A \end{aligned}$$

である。同様に、

$$A^4 = (b+3)^3 A$$

である。これらを $A^4 - 2A^3 - 3A^2 = O$ に代入すると、

$$\begin{aligned} (b+3)^3 A - 2(b+3)^2 A - 3(b+3)A &= O \\ \Leftrightarrow (b+3)\{(b+3)^2 - 2(b+3) - 3\}A &= O \\ \Leftrightarrow (b+3)(b+3+1)(b+3-3)A &= O \\ \therefore b(b+3)(b+4)A &= O \end{aligned}$$

となる。 $b(b+3)(b+4) \neq 0$ のとき、 A の 1 行 1 列の成分が 3 であるため、 A の定数倍は O になりえない。よって、

$$\begin{aligned} b(b+3)(b+4) &= 0 \\ \therefore b &= 0, -3, -4 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $3b-a^2=0$ より、 $b=\frac{1}{3}a^2 \geq 0$ が成り立つ。したがって、 $b=-3, -4$ は不適となり、 $b=0$ となる。このとき、

$$\begin{aligned} a^2 &= 3b = 0 \\ \therefore a &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上より、[2] の場合、求める実数の組は $(a, b)=(0, 0)$ である。

以上、[1], [2] より $A^4 - 2A^3 - 3A^2 = O$ が成り立つような実数 a, b の組は、

$$(a, b) = (0, 0), (0, -1), (0, 3)$$

である。

(答) $(a, b) = (0, 0), (0, -1), (0, 3)$