

1

(1)

$b_n - a_n$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 b_n - a_n &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\
 &= \frac{1 - \sqrt{(2n+1)(2n-1)} + 2n-1}{\sqrt{2n-1}} \\
 &= \frac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n-1}} \\
 &= \frac{4n^2 - 4n^2 + 1}{\sqrt{2n-1}(2n + \sqrt{4n^2 - 1})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2n-1}(2n + \sqrt{4n^2 - 1})} > 0 \quad (\because \sqrt{2n-1} > 0, 2n > 0, \sqrt{4n^2 - 1} > 0)
 \end{aligned}$$

となるため, $a_n < b_n$ が成り立つ。また, $a_n - b_{n+1}$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 a_n - b_{n+1} &= \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2(n+1)-1}} \\
 &= \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \\
 &= \frac{2n+1 - \sqrt{(2n+1)(2n-1)} - 1}{\sqrt{2n+1}} \\
 &= \frac{2n - \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1}} \\
 &= \frac{4n^2 - 4n^2 + 1}{\sqrt{2n+1}(2n + \sqrt{4n^2 - 1})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}(2n + \sqrt{4n^2 - 1})} > 0
 \end{aligned}$$

となるため, $b_{n+1} < a_n$ が成り立つ。以上より題意が示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より,

$$\begin{aligned}
 a_n &< b_n \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{40} a_k &< \sum_{k=1}^{40} b_k
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\sum_{k=1}^{40} a_k$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{40} a_k &= (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{79}) \\
 &= \sqrt{81} - \sqrt{1} \\
 &= 9 - 1 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

となるため, $8 < \sum_{k=1}^{40} b_k$ が成り立つ。また, (1)の結果より, $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &< a_n \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{39} b_{k+1} &< \sum_{k=1}^{39} a_k \\
 \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{40} b_k &< \sum_{k=1}^{39} a_k
 \end{aligned}$$

が成り立つ。 $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1 - 1}} = 1$ であるから,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{40} b_k &= b_1 + \sum_{k=2}^{40} b_k \\
 &= 1 + \sum_{k=2}^{40} b_k \\
 &< 1 + \sum_{k=1}^{39} a_k \\
 &< 1 + \sum_{k=1}^{40} a_k \quad (\because a_{40} > 0) \\
 &= 1 + 8 \\
 &= 9
 \end{aligned}$$

となるため, $\sum_{k=1}^{40} b_k < 9$ が成り立つ。以上より題意が示された。

(証明終)

2

(1)

$2^x = u$ とおくと $u > 0$ であり、この範囲内のある u に対しては、1つの x が対応する。したがって、与えられた方程式の実数解の個数は、 u の方程式

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{-x} &= t \\ \Leftrightarrow u + \frac{1}{u} &= t \\ \Leftrightarrow u^2 - tu + 1 &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

の正の実数解の個数と等しい。この方程式の判別式を D とすると、

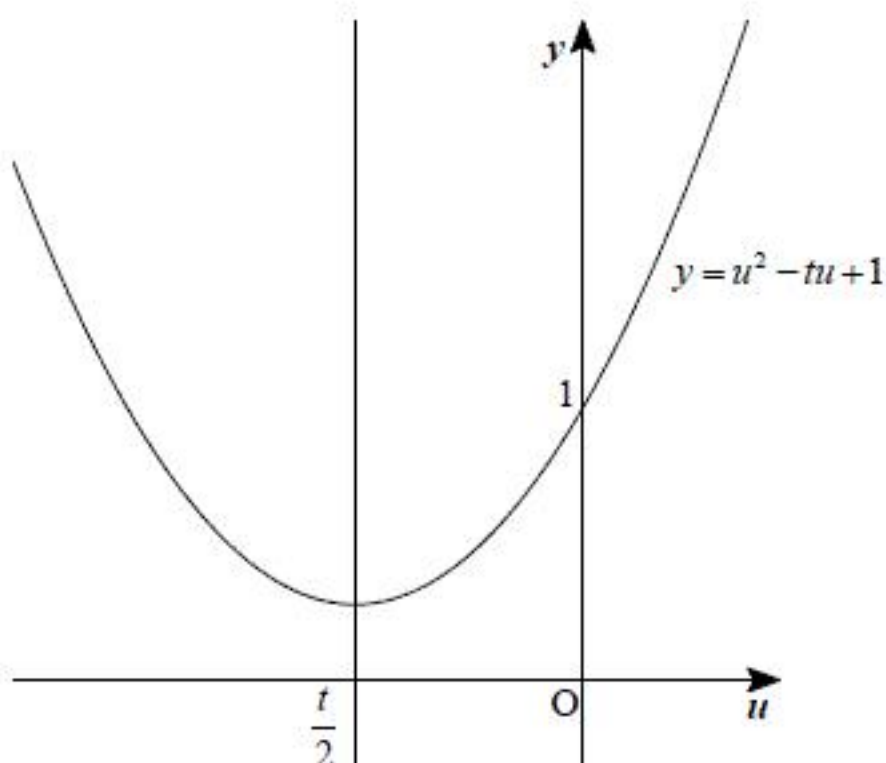
$$D = t^2 - 4$$

となる。また、 $f(u) = u^2 - tu + 1$ とおくと、放物線 $y = f(u)$ の軸は $u = \frac{t}{2}$ であり、

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - t \cdot 0 + 1 \\ &= 1 \\ &> 0 \end{aligned}$$

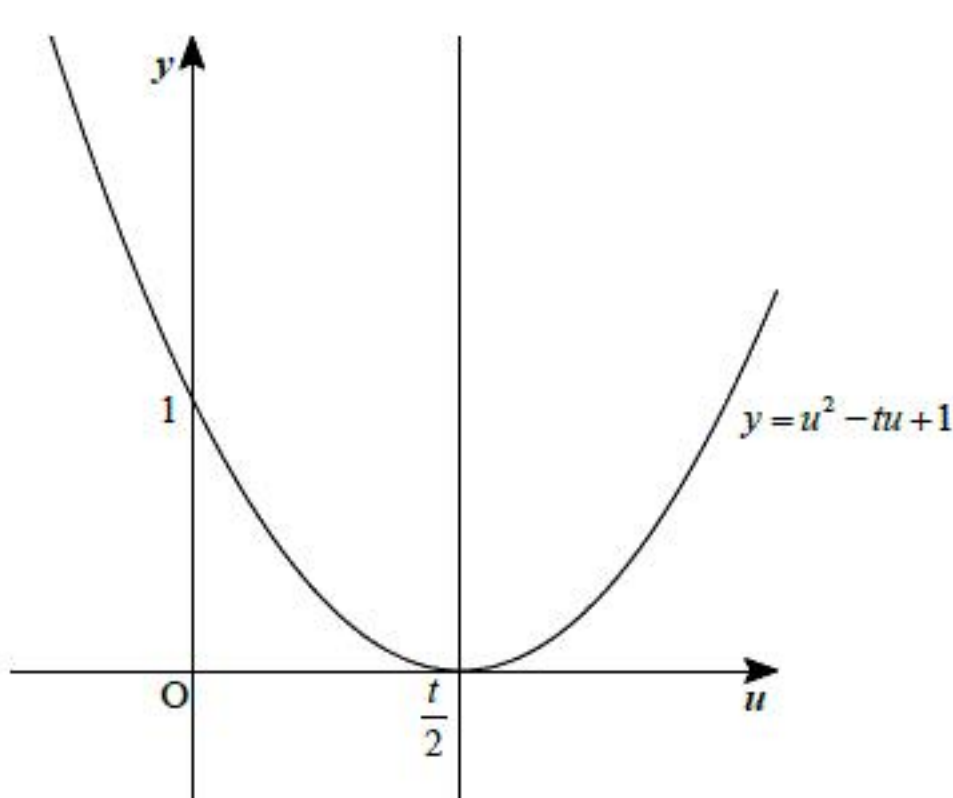
が成り立つ。したがって、

$$[1] \quad \frac{t}{2} \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 0 \text{ のとき}$$



$f(0) = 1 > 0$ であり、放物線 $y = f(u)$ が $u > 0$ で単調増加であることから、上図より放物線 $y = f(u)$ と u 軸は $u > 0$ の範囲に交点をもたない。したがって、①の正の実数解は存在しない。

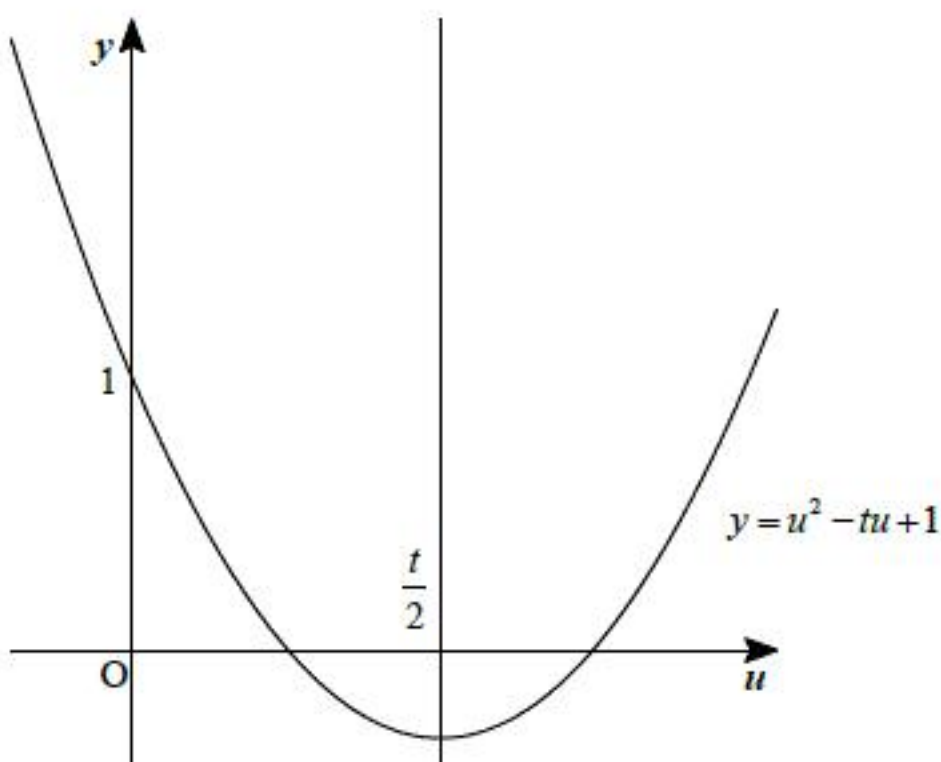
$$[2] \quad \frac{t}{2} > 0 \Leftrightarrow t > 0 \text{ のとき}$$



放物線が u 軸に接するとき、すなわち

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+2)(t-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = 2 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

のとき、①は正の重解をもつ。



放物線が u 軸に異なる2点で交わる時、すなわち

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow (t+2)(t-2) &> 0 \\ \Leftrightarrow t > 2 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

のとき、①は正の実数解を2個もつ。また、

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4 &< 0 \\ \Leftrightarrow (t+2)(t-2) &< 0 \\ \Leftrightarrow 0 < t < 2 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

のとき、①は解を持たない。

以上、[1], [2]より、与えられた方程式の実数解の個数は、 $t < 2$ のとき0個、 $t = 2$ のとき1個、 $t > 2$ のとき2個である。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} t < 2 \text{ のとき } 0 \text{ 個} \\ t = 2 \text{ のとき } 1 \text{ 個} \\ t > 2 \text{ のとき } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

(2)

$2^x + 2^{-x} = t$ とおくと、与えられた方程式は

$$\begin{aligned} 4^x + 4^{-x} + a(2^x + 2^{-x}) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + a(2^x + 2^{-x}) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + a(2^x + 2^{-x}) + b &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + at + b - 2 &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表せる。(1)の結果より、与えられた方程式が3個の実数解をもつための条件は、②の解の1つが $t = 2$ であり、もう一方の解が $t > 2$ となることである。ここで $t = 2$ を②に代入すると、

$$\begin{aligned} 4 + 2a + b - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= -2a - 2 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。また、③を②に代入すると、

$$\begin{aligned} t^2 + at + (-2a - 2) - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + at - 2a - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t+a+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t = 2, -a-2 \end{aligned}$$

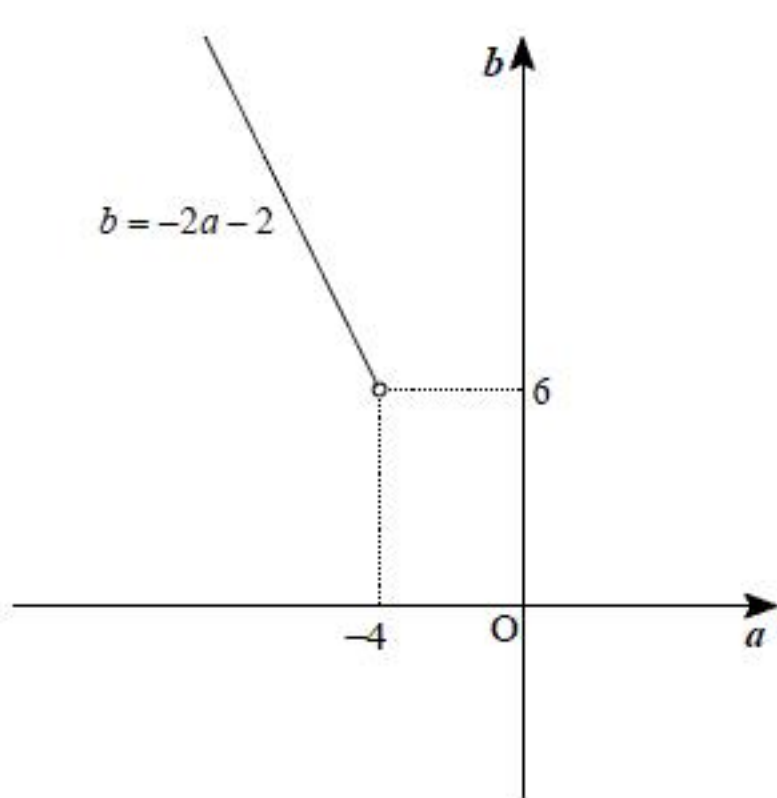
となり、②の解は $t = 2, -a-2$ と求まる。ここで、 $t = 2$ でない方の解は $t > 2$ であることから、

$$\begin{aligned} -a-2 &> 2 \\ \Leftrightarrow a &< -4 \end{aligned}$$

が導かれる。以上より、点 (a, b) の存在する範囲は、

$$b = -2a - 2 \quad (a < -4)$$

となり、これを図示すると以下ようになる。



(1)

点 R は辺 BF 上の点であり、 $\overrightarrow{BF}$ と $\overrightarrow{AE}$ は平行で長さが等しいため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR} &= \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BR} \\ &= \overrightarrow{QB} + k\overrightarrow{BF} \\ &= \frac{3}{4}\vec{x} + k\vec{z} \quad (k \text{ は実数}) \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 R は 3 点 P, Q, S を通る平面上にあり $\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{QS}$ は互いに一次独立であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR} &= \alpha\overrightarrow{QP} + \beta\overrightarrow{QS} \\ &= \alpha\left(-\frac{1}{4}\vec{x} + \frac{1}{4}\vec{y}\right) + \beta\left(\frac{3}{4}\vec{x} + t\vec{y} + \vec{z}\right) \\ &= \frac{-\alpha+3\beta}{4}\vec{x} + \frac{\alpha+4\beta t}{4}\vec{y} + \beta\vec{z} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数}) \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表せる。 $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ は互いに一次独立であるから、①と②の係数を比較すると、

$$\begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{-\alpha+3\beta}{4} & \dots \textcircled{3} \\ 0 = \frac{\alpha+4\beta t}{4} & \dots \textcircled{4} \\ k = \beta & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

が成り立つ。④より、

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\alpha+4\beta t}{4} \\ \Leftrightarrow \alpha &= -4\beta t\end{aligned}$$

となる。これを③に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{-(-4\beta t)+3\beta}{4} \\ \Leftrightarrow (4t+3)\beta &= 3 \\ \Leftrightarrow \beta &= \frac{3}{4t+3} \quad (\because 4t+3 > 0)\end{aligned}$$

と求まる。これを⑤に代入すると、

$$k = \beta = \frac{3}{4t+3}$$

となるため、これを①に代入して、

$$\overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\vec{x} + \frac{3}{4t+3}\vec{z}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{QR} = \frac{3}{4}\vec{x} + \frac{3}{4t+3}\vec{z}$$

(2)

立方体の一辺の長さを l とすると、

$$|\vec{x}| = |\vec{y}| = |\vec{z}| = l$$

が成り立ち、 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ は互いに垂直であるから、

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RQ} &= -\overrightarrow{QR} \\ &= -\frac{3}{4}\vec{x} - \frac{3}{4t+3}\vec{z} \\ \overrightarrow{RS} &= \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FS} \\ &= (1-k)\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FS} \\ &= \frac{4t}{4t+3}\vec{z} + t\vec{y}\end{aligned}$$

と表せる。 $\overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{RS}$ および $|\overrightarrow{RQ}|$, $|\overrightarrow{RS}|$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{RS} &= \left(-\frac{3}{4}\vec{x} - \frac{3}{4t+3}\vec{z}\right) \cdot \left(\frac{4t}{4t+3}\vec{z} + t\vec{y}\right) \\ &= -\frac{12t}{(4t+3)^2}l^2 \quad \left(\because \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0, |\vec{z}| = l\right) \\ |\overrightarrow{RQ}| &= \sqrt{\left|-\frac{3}{4}\vec{x} - \frac{3}{4t+3}\vec{z}\right|^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{16}l^2 + \frac{9}{(4t+3)^2}l^2} \\ &= \frac{3l}{4(4t+3)}\sqrt{(4t+3)^2 + 16} \\ |\overrightarrow{RS}| &= \sqrt{\left|\frac{4t}{4t+3}\vec{z} + t\vec{y}\right|^2} \\ &= \sqrt{\frac{16t^2}{(4t+3)^2}l^2 + t^2l^2} \\ &= \frac{tl}{4t+3}\sqrt{(4t+3)^2 + 16}\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\cos \angle QRS &= \frac{\overrightarrow{RQ} \cdot \overrightarrow{RS}}{|\overrightarrow{RQ}| |\overrightarrow{RS}|} \\ &= \frac{-\frac{12t}{(4t+3)^2}l^2}{\frac{3l}{4(4t+3)}\sqrt{(4t+3)^2 + 16} \cdot \frac{tl}{4t+3}\sqrt{(4t+3)^2 + 16}} \\ &= -\frac{16}{(4t+3)^2 + 16}\end{aligned}$$

が導かれる。ここで、与えられた条件 $\angle QRS = 120^\circ$ より、

$$\begin{aligned}\cos \angle QRS &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{16}{(4t+3)^2 + 16} &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (4t+3)^2 + 16 &= 32 \\ \Leftrightarrow (4t+3)^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow 4t+3 &= \pm 4 \\ \therefore t &= \frac{1}{4}, -\frac{7}{4}\end{aligned}$$

と求まる。 $0 < t < 1$ より、求める t の値は $t = \frac{1}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{4}$$

(1)

方程式 $y = x^2$ の両辺を x で微分すると

$$y' = 2x$$

となるため、 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線 l の傾きは $2a$ である。直線 m は傾きが $2a$ で点

(b, b^2) を通るため、 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2a(x-b) + b^2 \\ &= 2ax - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = 2ax - 2ab + b^2$$

(2)

放物線 C と直線 m の交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} x^2 &= 2ax - 2ab + b^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2ab - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-b)(x-2a+b) &= 0 \\ \therefore x &= b, 2a-b \end{aligned}$$

となる。ここで条件より、

$$\begin{aligned} a &< b \\ \Leftrightarrow 2a &< 2b \\ \Leftrightarrow 2a-b &< b \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $2a-b \leq x \leq b$ のとき、

$$\begin{aligned} 2ax - 2ab + b^2 - x^2 &= -(x^2 - 2ax + 2ab - b^2) \\ &= -(x-b)(x-2a+b) \\ &\geq 0 \quad (\because 2a-b \leq x \leq b) \end{aligned}$$

となるため、直線 m は放物線 C より上側にある。以上より、 S を計算すると、

$$\begin{aligned} S &= -\int_{2a-b}^b (x^2 - 2ax + 2ab - b^2) dx \\ &= -\int_{2a-b}^b (x-b)(x-2a+b) dx \\ &= \frac{1}{6} \{b - (2a-b)\}^3 \\ &= \frac{1}{6} (2b-2a)^3 \\ &= \frac{4}{3} (b-a)^3 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{4}{3} (b-a)^3$$

(3)

(a, b) の選び方は

$${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

通りであり、これらの生じる確率は同様に確からしい。ここで、各 (a, b) における $b-a$ の値を計算すると、

$$b-a = \begin{cases} 1 \{ (a, b) = (1, 2), (2, 3), (3, 4) \} \\ 2 \{ (a, b) = (1, 3), (2, 4) \} \\ 3 \{ (a, b) = (1, 4) \} \end{cases}$$

となるため、 S の期待値を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot 1^3 \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{3} \cdot 2^3 \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{3} \cdot 3^3 \cdot \frac{1}{6} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} (3+16+27) \\ &= \frac{92}{9} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{92}{9}$$

(1)

方程式 $y = e^x$ の両辺を x で微分すると

$$y' = e^x$$

となるため、 $\tan \alpha, \tan \beta$ をそれぞれ計算すると、

$$\tan \alpha = e^{\log t} = t$$

$$\tan \beta = e^{\log 2t} = 2t$$

と求まる。したがって直線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= t(x - \log t) + t \\ &= tx - t \log t + t \end{aligned}$$

となり、直線 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x - \log 2t) + 2t \\ &= 2tx - 2t \log 2t + 2t \end{aligned}$$

となる。 l, m の交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} tx - t \log t + t &= 2tx - 2t \log 2t + 2t \\ \Leftrightarrow x - \log t + 1 &= 2x - 2 \log 2t + 2 \quad (\because t > 0) \\ \Leftrightarrow x &= 2 \log 2t - \log t - 1 \end{aligned}$$

$$= \log 4t^2 - \log t - 1$$

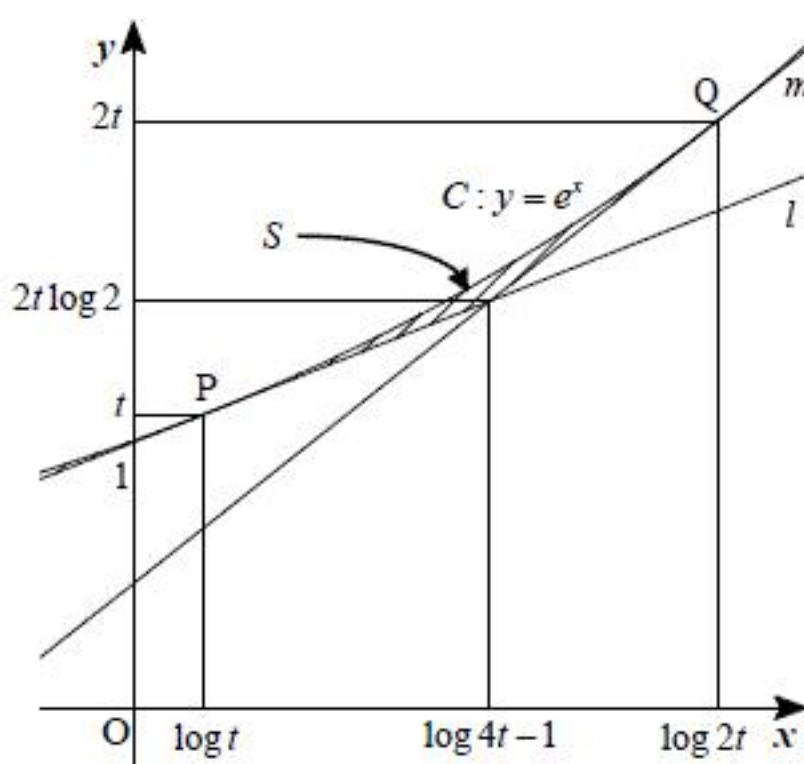
$$= \log \frac{4t^2}{t} - 1$$

$$= \log 4t - 1$$

と求まり、交点の y 座標を求めると、

$$\begin{aligned} y &= t(\log 4t - 1) - t \log t + t \\ &= 2t \log 2 \end{aligned}$$

となる。曲線 $y = e^x$ は下に凸であるから、接線 l, m より上側に存在する。以上より、 S を図示すると以下ようになる。



したがって、上図より

$$\begin{aligned} S &= \int_{\log t}^{\log 2t} e^x dx - \frac{1}{2} \cdot (t + 2t \log 2) \cdot (\log 4t - 1 - \log t) - \frac{1}{2} \cdot (2t \log 2 + 2t) \cdot \{\log 2t - (\log 4t - 1)\} \\ &= \left[e^x \right]_{\log t}^{\log 2t} - \frac{t}{2} (2 \log 2 + 1)(2 \log 2 - 1) - t(1 + \log 2)(1 - \log 2) \\ &= (2t - t) - \frac{t}{2} \{4(\log 2)^2 - 1\} - t\{1 - (\log 2)^2\} \\ &= \frac{t}{2} - t(\log 2)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \alpha = t, \tan \beta = 2t, S = \frac{t}{2} - t(\log 2)^2$$

(2)

(1)の結果より $\tan \alpha = t, \tan \beta = 2t$ であり、 $t > 0$ より $\tan \alpha > 0, \tan \beta > 0$ であるから、

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

となる。したがって、 $\beta - \alpha$ は

$$-\frac{\pi}{2} < \beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$$

の範囲に存在する。 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\tan x$ は単調増加であることから、 $\beta - \alpha$ が最

大となるのは $\tan(\beta - \alpha)$ が最大となるときである。ここで、加法定理より

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{t}{1 + 2t^2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{t} + 2t} \end{aligned}$$

である。 $t > 0$ より $\frac{1}{t} > 0, 2t > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係より、

$$\frac{1}{t} + 2t \geq 2\sqrt{\frac{1}{t} \cdot 2t} = 2\sqrt{2}$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned} \tan(\beta - \alpha) &= \frac{1}{\frac{1}{t} + 2t} \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。また、等号成立条件は

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} &= 2t \\ \Leftrightarrow t^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore t &= \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

である。以上より、 $\beta - \alpha$ が最大となるときの t の値は $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(1)(i)

$(A+B+AB)^2$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 (A+B+AB)^2 &= (A+B+AB)(A+B+AB) \\
 &= A^2 + AB + A^2B + BA + B^2 + BAB + ABA + AB^2 + ABAB \\
 &= A^2 + B^2 + (AB+BA) + A(AB+BA) + (AB+BA)B + ABAB \\
 &= E - E + ABAB \quad (\because A^2 = E, B^2 = -E, AB+BA = O) \\
 &= ABAB
 \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned}
 AB+BA &= O \\
 \Leftrightarrow BA &= -AB
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 (A+B+AB)^2 &= ABAB \\
 &= A(BA)B \\
 &= A(-AB)B \\
 &= -AABB \\
 &= -A^2B^2 \\
 &= -E(-E) \\
 &= E
 \end{aligned}$$

となり, 題意が示された。

(証明終)

(ii)

$A+B=O$ と仮定すると, $B=-A$ となるため,

$$\begin{aligned}
 B^2 &= (-A)^2 \\
 &= A^2 \\
 &= E \quad (\because A^2 = E)
 \end{aligned}$$

となるが, これは与えられた条件 $B^2 = -E$ と矛盾する。以上より,

$$A+B \neq O$$

が示された。

(証明終)

(iii)

$AB=E$ と仮定すると,

$$\begin{aligned}
 A &= AE \\
 &= A(AB) \\
 &= A^2B \\
 &= EB \\
 &= B
 \end{aligned}$$

となり, $A=B$ が成り立つ。したがって,

$$\begin{aligned}
 A^2 &= B^2 \\
 &= -E \quad (\because B^2 = -E)
 \end{aligned}$$

となるが, これは与えられた条件 $A^2 = E$ と矛盾する。以上より,

$$AB \neq E$$

が示された。

(証明終)

(2)

$C=A+B$ とすると, (1)(ii)の結果より C は零行列でない2次正方行列である。このとき,

$$\begin{aligned}
 (A+B)C &= (A+B)(A+B) \\
 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\
 &= E + O + (-E) \\
 &= O
 \end{aligned}$$

となるため, 題意が示された。

(証明終)