

(1)

袋の中から無作為にカードを1枚取り出すとき、1, 2, 3の数字を書いたカードが出る確率は

それぞれ $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ である。 R_n が3で割り切れない事象とは、 n 回の試行すべてで1または2の

カードが出る事象であるから、 R_n が3で割り切れない確率は、

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。次に、 R_n が6で割り切れる確率を考える。これは、 n 回の試行で2と3のカードが少なくとも1回出る確率である。よって、余事象を考えると、(R_n が6で割り切れる確率) $=1 -$

(R_n が2で割り切れない確率) $- (R_n$ が3で割り切れない確率) $+ (R_n$ が6で割り切れない確率)

となる。これより、 R_n が6で割り切れる確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

となる。

(答) R_n が3で割り切れない確率： $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ， R_n が6で割り切れる確率： $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{6}\right)^n$

(2)

S_{n+1} が偶数となるのは、 S_n が偶数で $n+1$ 回目の試行で2を引く場合、もしくは S_n が奇数で $n+1$ 回目の試行で1または3を引く場合のどちらかである。よって、 p_{n+1} を p_n を用いて表すと、

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}(1-p_n)$$

$$\Leftrightarrow p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$$

となる。これを変形すると、

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

となる。上式より、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから、求め

る一般項は、

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}$$

である。

(答) $p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}$ ， $p_n = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\}$

a が整数であることを用いて与えられた方程式を変形すると,

$$\begin{aligned}
 & 2a \sin(bx + a\pi) \sin bx - \cos 2bx + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2a (\sin bx \cos a\pi + \cos bx \sin a\pi) \sin bx - \cos 2bx + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2a \cdot \left\{ \sin bx \cdot (-1)^a + 0 \right\} \cdot \sin bx - (1 - 2\sin^2 bx) + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2a \cdot (-1)^a \sin^2 bx + 2\sin^2 bx = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2 \left\{ a \cdot (-1)^a + 1 \right\} \sin^2 bx = 0
 \end{aligned}$$

となる。上式がすべての実数 x について成り立つのは,

$$a(-1)^a + 1 = 0 \text{ または } b = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ または } b = 0$$

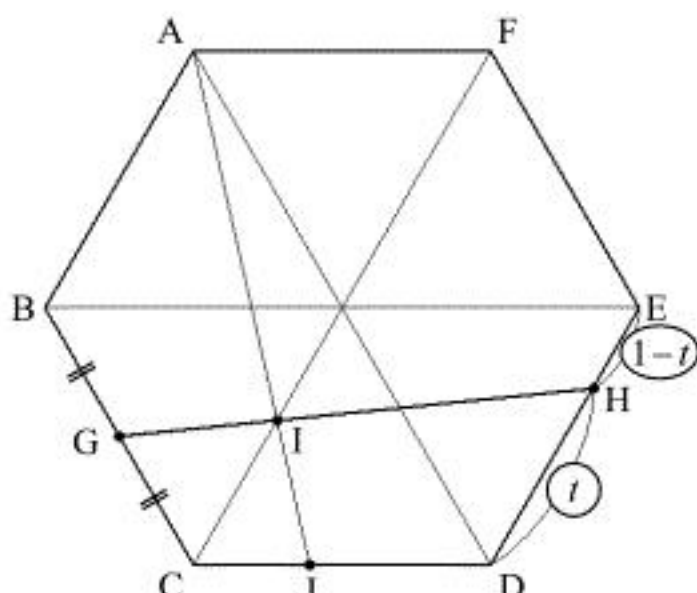
のときである。よって、整数 a, b の組は,

$$(a, b) = (0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 0)$$

となる。

$$(\text{答}) (a, b) = (0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (3, 0)$$

正六角形 ABCDEF と点 G, H, I, J を図示すると、下図のようになる



(1)

ABCDEF が正六角形であることから、6 辺をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}$ を用いてベクトルで表すと、

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} = \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \vec{a} + \vec{b}$$

となる。これより、ベクトル $\overrightarrow{AC}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= 2\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 G は辺 BC の中点であるから、ベクトル $\overrightarrow{AG}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}(2\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。さらに、点 H は辺 DE を $t:(1-t)$ に内分する点であるから、ベクトル $\overrightarrow{AH}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= (1-t)\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{AE} \\ &= (1-t) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + t \cdot (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}) \\ &= (1-t) \cdot 2(\vec{a} + \vec{b}) + t \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= (2-t)\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \overrightarrow{AH} = (2-t)\vec{a} + 2\vec{b}$$

(2)

点 I は直線 CF と直線 GH の交点である。ここで、 $0 \leq s \leq 1$, $0 \leq u \leq 1$ なる実数 s, u を用い

て、 $CI:IF = s:(1-s)$, $GI:IH = u:(1-u)$ と表すと、 $\overrightarrow{AI}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= (1-s)\overrightarrow{AC} + s\overrightarrow{AF} \\ &= (1-s)(2\vec{a} + \vec{b}) + s\vec{b} \\ &= 2(1-s)\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= (1-u)\overrightarrow{AG} + u\overrightarrow{AH} \\ &= \left\{ \frac{3(1-u)}{2}\vec{a} + \frac{1-u}{2}\vec{b} \right\} + \left\{ (2-t)u\vec{a} + 2u\vec{b} \right\} \\ &= \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}u - tu \right)\vec{a} + \frac{3u+1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

の 2 通りで表せる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立であるから、各成分を比較して、

$$\begin{aligned}\begin{cases} 2(1-s) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}u - tu \\ 1 = \frac{3u+1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}u + \frac{1}{2}ut \\ u = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow s = \frac{1+t}{6}, u = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

を得る。よって、

$$GI:IH = u:(1-u) = 1:2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad GI:IH = 1:2$$

(3)

(2) より $s = \frac{1+t}{6}$ であるから、 $\overrightarrow{AI}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= 2\left(1 - \frac{1+t}{6}\right)\vec{a} + \vec{b} \\ &= \frac{5-t}{3}\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、点 J は直線 AI 上にあるから、 $\overrightarrow{AJ}$ は実数 k を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= k\overrightarrow{AI} \\ &= \frac{5-t}{3}k\vec{a} + k\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。また、点 J は線分 CD を 1:2 に内分するから、 $\overrightarrow{AJ}$ は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{2}{3}(2\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{3}(2\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= 2\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

とも表せる。 $\vec{a}, \vec{b}$ は 1 次独立であるから、各成分を比較して、

$$\begin{aligned}\begin{cases} \frac{5-t}{3}k = 2 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}, k = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

となる。よって $t = \frac{1}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{2}$$

(1)

放物線 $y = \frac{1}{4}x^2$ の導関数は $y' = \frac{1}{2}x$ であるから、点 Q の座標を $\left(t, \frac{t^2}{4}\right)$ とおくと、点 Q における放物線 C の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - \frac{t^2}{4} &= \frac{t}{2}(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} \end{aligned}$$

となる。これが点 $P(0, -4)$ を通り、傾きが正であるので、

$$\begin{cases} -4 = -\frac{t^2}{4} \\ \frac{t}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 4$$

を得る。よって、接線 l の方程式は $y = 2x - 4$ であり、点 Q の座標は $(4, 4)$ である。

(答) 接線 l の方程式: $y = 2x - 4$, 点 Q の座標: $(4, 4)$

(2)

直線 m は点 $Q(4, 4)$ を通り、傾きが $-\frac{1}{2}$ の直線である。よって、求める方程式は、

$$\begin{aligned} y - 4 &= -\frac{1}{2}(x - 4) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2}x + 6 \end{aligned}$$

となる。

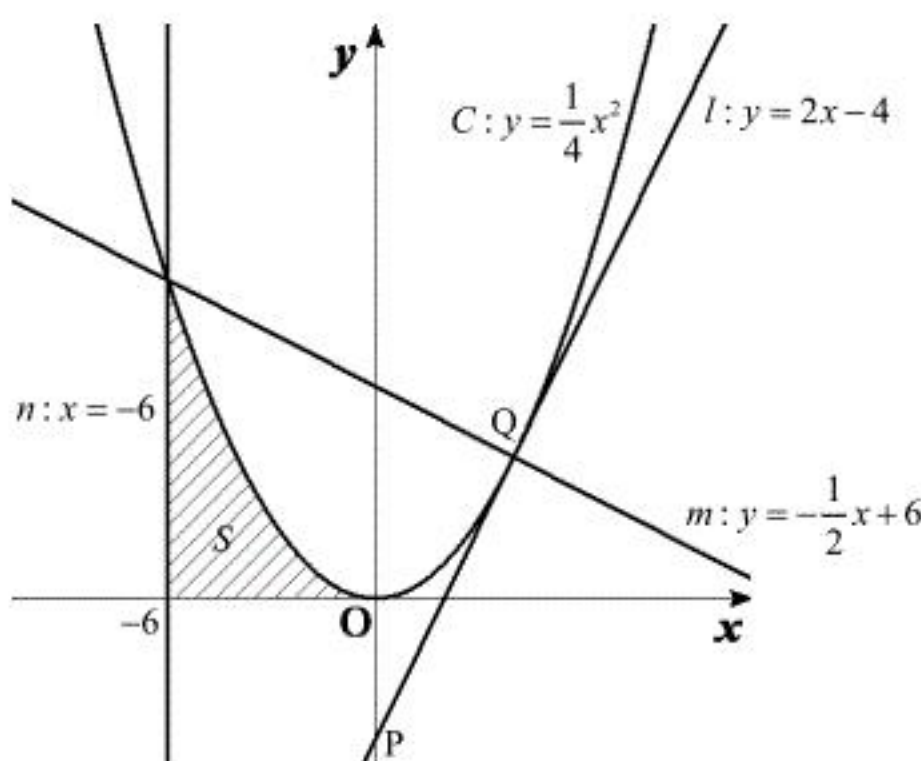
$$(答) y = -\frac{1}{2}x + 6$$

(3)

直線 m と放物線 C の点 Q 以外の交点の x 座標を求める。 $y = -\frac{1}{2}x + 6$ と $y = \frac{1}{4}x^2$ から y を消去して解くと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^2 &= -\frac{1}{2}x + 6 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 6)(x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -6, 4 \end{aligned}$$

となるが、点 Q の x 座標が 4 であるから、直線 m と放物線 C の点 Q 以外の交点の x 座標は -6 となる。よって直線 n の方程式は $x = -6$ である。これより、各直線と放物線の関係は下図のようになる。



放物線 C と x 軸および直線 n で囲まれた部分の面積は上図のようになるから、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-6}^0 \frac{x^2}{4} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} \right]_{-6}^0 \\ &= 18 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = 18$

(1)

与えられた等式を変形すると、

$$\int_0^x (x-t)f(t)dt = e^x + 2e^{-x} - \frac{3}{2}x^2 + ax + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = e^x + 2e^{-x} - \frac{3}{2}x^2 + ax + b \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。②の両辺を x で微分すると、

$$\left\{ \int_0^x f(t)dt + xf(x) \right\} - xf(x) = e^x - 2e^{-x} - 3x + a$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt = e^x - 2e^{-x} - 3x + a \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。さらに、③の両辺を x で微分すると、

$$f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3 \quad \cdots \textcircled{4}$$

を得る。また、 $x=0$ を③、①にそれぞれ代入すると、

$$0 = 1 - 2 + a$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

$$0 = 1 + 2 + b$$

$$\Leftrightarrow b = -3$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad f(x) = e^x + 2e^{-x} - 3, \quad a = 1, \quad b = -3$$

(2)

$f(x)$ の導関数は、

$$f'(x) = e^x - 2e^{-x}$$

$$= e^x \left(1 - \frac{2}{e^{2x}} \right)$$

であるので、 $y = f(x)$ の増減表を書くと以下のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2\sqrt{2}-3$	$\nearrow$

また、 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ であり、 $f(x) = 0$ となる x 座標は

$$f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x + 2e^{-x} - 3 = 0$$

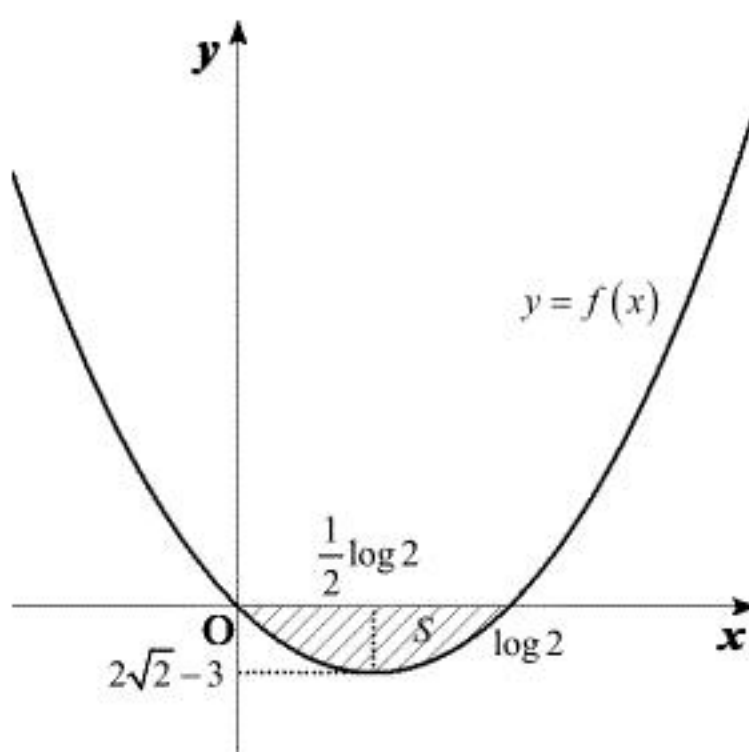
$$\Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 2)(e^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1, 2$$

$$\therefore x = 0, \log 2$$

より、 $x = 0, \log 2$ である。以上より $y = f(x)$ のグラフを描くと下図のようになる。



上図の斜線部分の面積が求める面積 S であるから、

$$S = \int_0^{\log 2} \{-f(x)\} dx$$

$$= \int_0^{\log 2} (-e^x - 2e^{-x} + 3) dx$$

$$= \left[-e^x + 2e^{-x} + 3x \right]_0^{\log 2}$$

$$= -(2-1) + 2\left(\frac{1}{2}-1\right) + 3\log 2$$

$$= 3\log 2 - 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = 3\log 2 - 2$$

(1)

楕円 C 上のある点を $Q(p, q)$ とおくと、

$$\frac{p^2}{3} + \frac{q^2}{4} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。点 Q における接線の方程式は、

$$\frac{p}{3}x + \frac{q}{4}y = 1$$

となる。これが点 $P(3, 2)$ を通るので、

$$\begin{aligned} p + \frac{q}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow p &= -\frac{1}{2}q + 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。②を①に代入して解くと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}q + 1 \right)^2 + \frac{q^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow (q-2)^2 + 3q^2 &= 12 \\ \Leftrightarrow 4q^2 - 4q - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (q-2)(q+1) &= 0 \\ \therefore q &= -1, 2 \end{aligned}$$

を得る。よって、 $(p, q) = (0, 2), \left(\frac{3}{2}, -1\right)$ である。 $a < c$ より、 $(a, b) = (0, 2), (c, d) = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (0, 2), (c, d) = \left(\frac{3}{2}, -1\right)$$

(2)

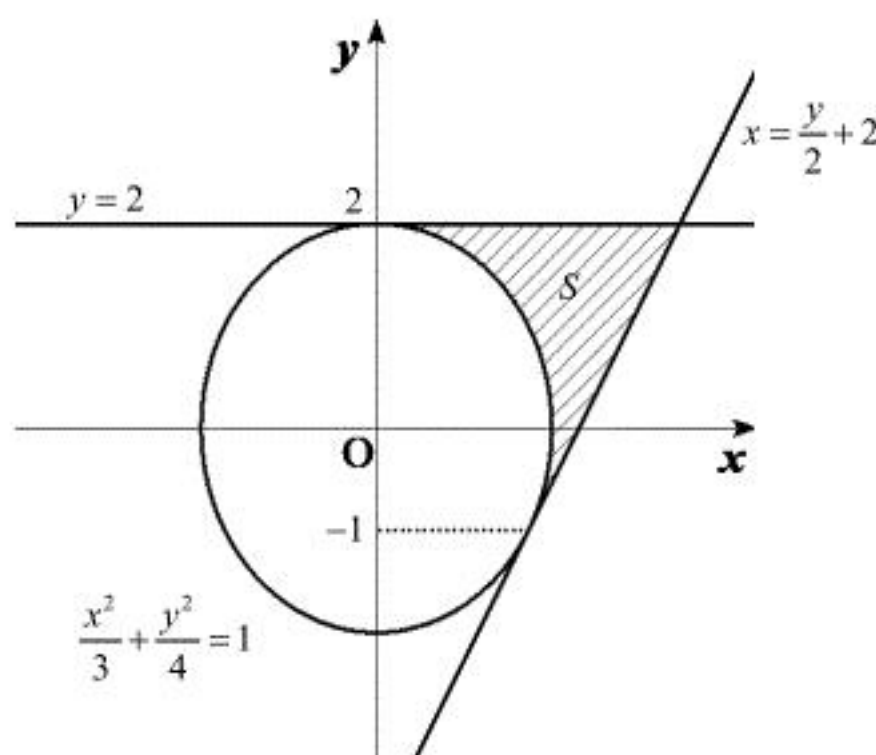
C の $x \geq 0$ の部分である曲線 C_0 の方程式は、①を x について解くと、

$$x = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$$

とかける。ここで、2接線の方程式はそれぞれ

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = \frac{y}{2} + 2 \end{cases}$$

であり、接点の y 座標はそれぞれ $y = 2, -1$ であるから、求める面積 S は下図のようになる。



上図より、求める S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \left(\frac{y}{2} + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{4 - y^2} \right) dy \\ &= \int_{-1}^2 \left(\frac{y}{2} + 2 \right) dy - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^2 \sqrt{4 - y^2} dy \end{aligned}$$

となる。上式の第1項と第2項の定積分をそれぞれ求める。第1項は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \left(\frac{y}{2} + 2 \right) dy &= \left[\frac{y^2}{4} + 2y \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{4} \{ 2^2 - (-1)^2 \} + 2 \{ 2 - (-1) \} \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

と求まる。また、第2項の定積分について $y = 2 \sin \theta$ と置換すると、 $dy = 2 \cos \theta d\theta$ であり、積分区間の対応は、

y	-1	$\rightarrow$	2
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

となるので、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \sqrt{4 - y^2} dy &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta} \cdot 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \theta d\theta \quad \left(\because -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \theta > 0 \right) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= [2\theta + \sin 2\theta]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} + \left\{ 0 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \left(\frac{y}{2} + 2 \right) dy - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^2 \sqrt{4 - y^2} dy \\ &= \frac{27}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = 6 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$