1

(1)

$$
\begin{aligned}
&x^3+3x-4=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+4\right)=0\\
&\therefore x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}
\end{aligned}
$$

である。

(答) $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

(2)

$\alpha=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ を代入して計算すると,

$$
\begin{aligned}
\alpha^3+3\alpha&=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)\\
&=\left(\sqrt{5}+2\right)-3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)^2\left(\sqrt{5}-2\right)}+3\sqrt[3]{\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)^2}-\left(\sqrt{5}-2\right)\\
&\quad+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)\\
&=4-3\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}+3\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}+3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)\\
&=4
\end{aligned}
$$

となる。よって，$\alpha^3+3\alpha$ は整数である。

(証明終)

(3)

(2)より,

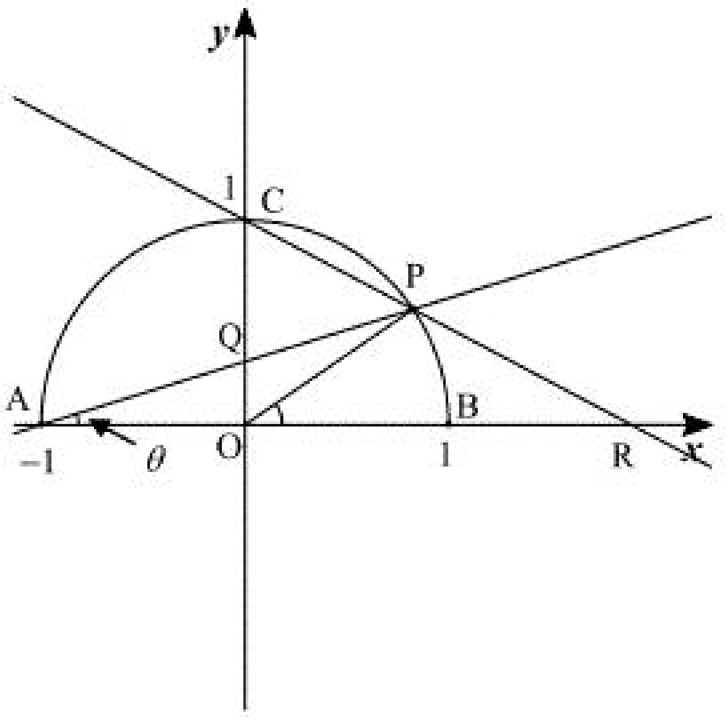
$$
\alpha^3+3\alpha=4\Leftrightarrow\alpha^3+3\alpha-4=0
$$

であり，α は $x^3+3x-4=0$ の解であることが分かる。α は実数であるから, (1)より $\alpha=1$ であり，これは整数である。

(証明終)

3

(1)



円周角の定理より，$\angle BOP = 2\angle OAQ = 2\theta$ であるから，点 P の座標は $(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$ と表せる。

ここで，点 P は第 I 象限にあるから，θ の定義域は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ となる。これより，

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot(\text{P の } y \text{ 座標}) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

が得られる。また，O から AP におろした垂線の足を H とすると，$AH = \cos\theta$ であるから，

$$AP = 2AH = 2\cos\theta$$

であり，$AC = \sqrt{2}$ である。さらに，

$$\angle PAC = \angle OAC - \angle OAQ = \frac{\pi}{4} - \theta$$

であるから，S_2 は，

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\cdot AC\cdot AP\cdot \sin\angle PAC \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cos\theta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\theta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) \\ &= \cos\theta(\cos\theta - \sin\theta) \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_1 = 2\sin\theta\cos\theta,\ S_2 = \cos\theta(\cos\theta - \sin\theta)$

(2)

$$\begin{aligned} &S_1 = 2S_2 \\ &\Leftrightarrow 2\cos\theta(\cos\theta - 2\sin\theta) = 0 \end{aligned}$$

であり，$\cos\theta > 0$ であるから，$S_1 = 2S_2$ となるのは

$$\cos\theta = 2\sin\theta \Leftrightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$$

のときである。これより，

$$OQ = OA\tan\theta = \frac{1}{2}$$

と求められる。ここで，$\angle APC$ は弧 AC に対する円周角であるから，$\angle APC = \dfrac{\pi}{4}$ であり，

$$\angle PRA = \angle APC - \angle PAR = \frac{\pi}{4} - \theta$$

となるから，

$$\tan\angle PRA = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} = \frac{1}{3}$$

であり，

$$OR = \frac{OC}{\tan\theta} = 3$$

と求まる。

(答) $OQ = \dfrac{1}{2},\ OR = 3$

4

(1)

条件 $f(-1)=1,\ f(1)=5$ より，

$$\begin{cases} -a+b-c+d=1 & \cdots ① \\ a+b+c+d=5 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。よって，①＋②より $b+d=3$ が，①－②より $a+c=2$ が得られるから，

$$f(x)=ax^3+bx^2+(2-a)x+3-b$$

と表すことができる。このとき

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= 2\int_0^1 (bx^2+3-b)\,dx \\ &= 2\left[\frac{b}{3}x^3+(3-b)x\right]_0^1 \\ &= 2\left(3-\frac{2}{3}b\right) \\ &= 6-\frac{4}{3}b\end{aligned}$$

であり，$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=8$ より，

$$6-\frac{4}{3}b=8 \Leftrightarrow b=-\frac{3}{2}$$

が得られる。よって，$f(0)=3-b=\frac{9}{2}$ となる。

(答) $f(0)=\frac{9}{2}$

(2)

(1)より，

$$f(x)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+(2-a)x+\frac{9}{2}$$

と表せて，

$$f'(x)=3ax^2-3x+2-a$$

となる。$f(x)$ が $x=0$ で極値をとるには $f'(0)=0$ が必要であるから，

$$2-a=0 \Leftrightarrow a=2$$

となる。このとき，

$$f'(x)=6x^2-3x=6x\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

であり，増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，確かに $x=0$ で極値をとっている。このとき極小値は $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{35}{8}$ である。

(答) 極小値 $\frac{35}{8}$

$\boxed{5}$

(1)

$p+qi$ は $s+ti$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点であるから,

$$\begin{aligned} p+qi &= (s+ti)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= (s+ti)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \frac{s+t}{\sqrt{2}}+\frac{-s+t}{\sqrt{2}}i \end{aligned}$$

であるから, $p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(s+t),\ q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-s+t)$ となる。

(答) $p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(s+t),\ q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-s+t)$

(2)

点 $p+qi$ が曲線 C_0 上にあるとすると, 等式 $5p^2+5q^2-6pq=8$ が成り立つ。これに

$p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(s+t),\ q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-s+t)$ を代入すると,

$$\begin{aligned} &5\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(s+t)\right\}^2+5\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-s+t)\right\}^2-6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(s+t)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(-s+t)=8 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2}(s+t)^2+\frac{5}{2}(-s+t)^2-3(-s^2+t^2)=8 \\ &\Leftrightarrow 8s^2+2t^2=8 \\ &\Leftrightarrow 4s^2+t^2=4 \end{aligned}$$

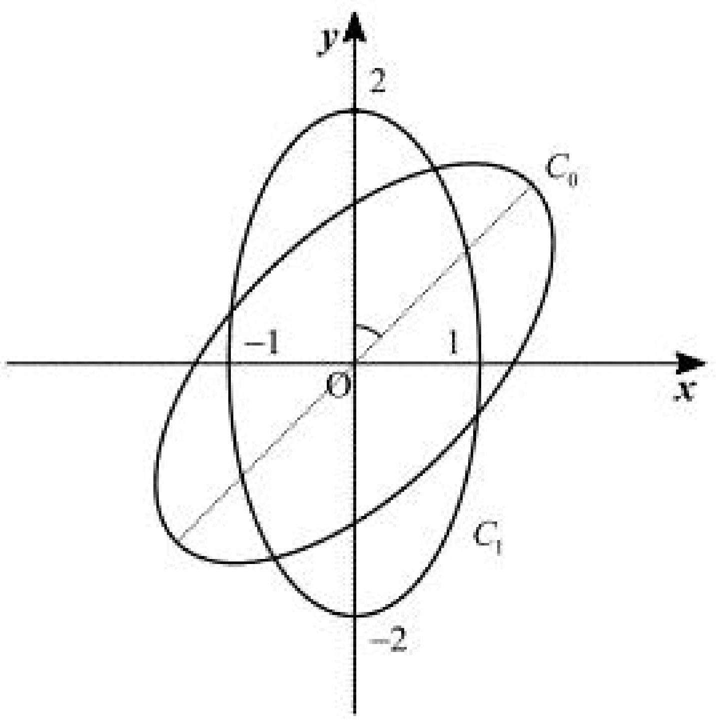
となる。このとき, 点 $s+ti$ は点 $p+qi$ を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点であるから, 点 $s+ti$ は曲線 C_1 上の点となる。よって, 曲線 C_1 の方程式は $4x^2+y^2=4$ である。ゆえに,

$$a=4,\ b=1,\ c=d=e=0$$

である。

(答) $a=4,\ b=1,\ c=d=e=0$

(3)



曲線 C_1 上の点で原点からの距離が最大の点は, $\pm 2i$ の 2 点である。これらを原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させた点が, 曲線 C_0 上の点で原点からの距離が最大となる点となる。よって, 求める点は,

$$\pm 2i\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=\pm 2i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\pm\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)$$

となる。

(答) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$\boxed{6}$

(1)

y 座標が1であるとき，

$$y=1 \Leftrightarrow \cos\theta=0$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi \quad (\because\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

である。$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき，$x=\frac{\pi}{2}-1$ であり，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ のとき $x=\frac{3}{2}\pi+1$ である。点Pはこれらのうち，x 座標が大きい方であるから，$\theta=\frac{3}{2}\pi$ である。したがって，点Pの座標は $\left(\frac{3}{2}\pi+1,1\right)$ である。

(答) $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\pi+1,1\right)$

(2)

$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ であるから，

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta\end{aligned}$$

である。$0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$ のとき，$\sin\frac{\theta}{2} \geqq 0$ であるから，

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\\&=\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}\\&=-4\cos\frac{3}{4}\pi-(-4)\\&=4+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

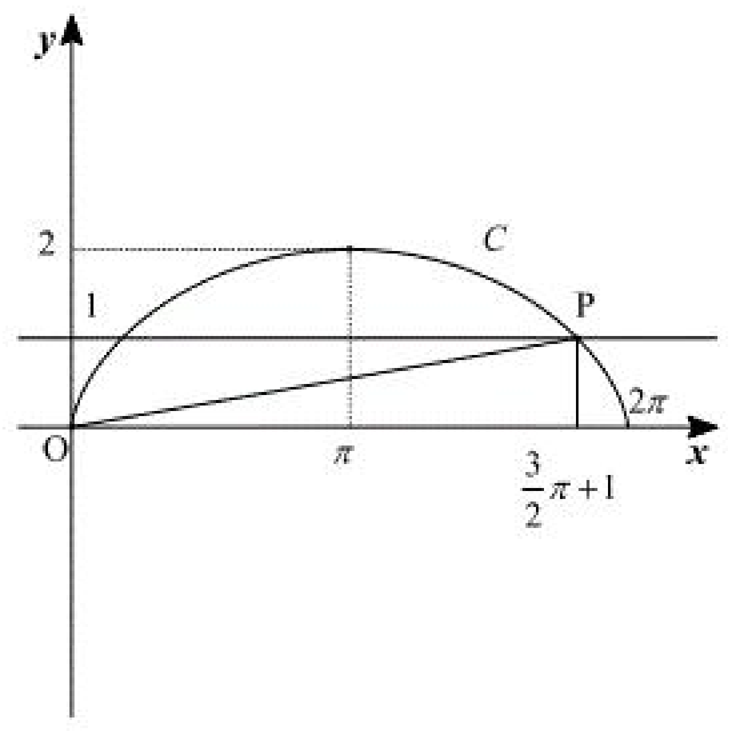
(答) $L=4+2\sqrt{2}$

(3)

$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ より，曲線 C の増減表は以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$+$		$+$	0
$\frac{dy}{d\theta}$	0	$+$	0	$-$	0
$(x,\ y)$	$(0,\ 0)$	$\nearrow$	$(\pi,\ 2)$	$\searrow$	$(2\pi,\ 0)$

これより，曲線 C を図示すると以下のようになる。



線分OPを x 軸のまわりに1回転させてできる立体は，底面の半径1，高さ $\frac{3}{2}\pi+1$ の円錐であるから，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\frac{3}{2}\pi+1}y^2dx-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot1^2\cdot\left(\frac{3}{2}\pi+1\right)\\&=\pi\int_0^{\frac{3}{2}\pi+1}(1-\cos\theta)^2\,dx-\left(\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

と表せる。$x=\theta-\sin\theta$ として置換すると，$dx=(1-\cos\theta)d\theta$ であり，

x	0	$\to$	$\frac{3}{2}\pi+1$
θ	0	$\to$	$\frac{3}{2}\pi$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3}{2}\pi+1}(1-\cos\theta)^2\,dx&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(1-\cos\theta)^2(1-\cos\theta)\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta\right)d\theta\end{aligned}$$

となる。半角の公式より，

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$$

であり，また，三倍角の公式より，

$$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta \Leftrightarrow \cos^3\theta=\frac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4}$$

であるから，それぞれ代入すると，

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta\right)d\theta\\&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{1-3\cos\theta+3\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)-\frac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4}\right\}d\theta\\&=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(\frac{5}{2}-\frac{15}{4}\cos\theta+\frac{3}{2}\cos2\theta-\frac{1}{4}\cos3\theta\right)d\theta\\&=\left[\frac{5}{2}\theta-\frac{15}{4}\sin\theta+\frac{3}{4}\sin2\theta-\frac{1}{12}\sin3\theta\right]_0^{\frac{3}{2}\pi}\\&=\frac{15}{4}\pi+\frac{11}{3}\end{aligned}$$

と計算できる。よって，

$$V=\pi\left(\frac{15}{4}\pi+\frac{11}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{3}\pi\right)=\frac{13}{4}\pi^2+\frac{10}{3}\pi$$

である。

(答) $V=\frac{13}{4}\pi^2+\frac{10}{3}\pi$