

(1)

点Dは線分OAを1:2に内分する点であり、点Eは線分OBを2:1に内分する点であり、点Fは線分OCの中点であるから

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\vec{a}, \quad \overrightarrow{OE} = \frac{2}{3}\vec{b}, \quad \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\vec{c} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。さらに、点Pは線分EFを2:1に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OF}}{2+1} = \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(2)

点Qは直線DP上の点であるため、 $\overrightarrow{DQ} = k\overrightarrow{DP}$ (k は実数)とおける。よって、①、②と合わせて

$$\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OD} = k(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}(1-k)\vec{a} + \frac{2}{9}k\vec{b} + \frac{1}{3}k\vec{c} \quad \dots \textcircled{3}$$

と表せる。また、点Qは3点A, B, Cが定める平面上の点であるため、 $\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ (s, t は実数)とおける。よって、

$$\overrightarrow{OQ} - \vec{a} = s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} = (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せる。ここで、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ はいずれも $\vec{0}$ に等しくなく互いに平行でないから、③、④について係数比較をすることにより、 k, s, t の値は

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(1-k) = 1-s-t \\ \frac{2}{9}k = s \\ \frac{1}{3}k = t \end{cases} \Leftrightarrow (k, s, t) = \left(3, \frac{2}{3}, 1\right)$$

と求まる。したがって、これらを③、④に代入することにより

$$\overrightarrow{OQ} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c}$$

(3)

(2)の結果より、

$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \vec{c}$$

と表せる。ここで、四面体OABCは1辺の長さが1である正四面体であるから

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、求める値は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BQ}|^2 &= \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2 \cdot \frac{2}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - 2 \cdot \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - 2 \cdot \frac{2}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 1 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BQ}| = \frac{\sqrt{7}}{3} (> 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{BQ}| = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

(1)

数列 $\{a_n\}$ の漸化式について、底の変換公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{4}} a_{n+1} + \log_2 a_n = n &\Leftrightarrow \frac{\log_4 a_{n+1}}{\log_4 \frac{1}{4}} + \frac{\log_4 a_n}{\log_4 2} = n \\ &\Leftrightarrow -b_{n+1} + 2b_n = n \quad (\because b_n = \log_4 a_n) \\ &\Leftrightarrow b_{n+1} = 2b_n - n\end{aligned}$$

となり、数列 $\{b_n\}$ の漸化式が得られる。

(答) $b_{n+1} = 2b_n - n$

(2)

(1)で得られた、数列 $\{b_n\}$ の漸化式は

$$b_{n+1} + p(n+1) + q = 2(b_n + pn + q) \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たすような定数 p, q が見つければ解くことができる。ここで、 $\textcircled{1}$ を変形すると

$$b_{n+1} + p(n+1) + q = 2(b_n + pn + q) \Leftrightarrow b_{n+1} = 2b_n + pn + (-p + q)$$

となるから、(1)の結果と比較することで、 p, q の値を

$$\begin{cases} p = -1 \\ -p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (p, q) = (-1, -1)$$

とすればよいことがわかる。よって、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = b_n - n - 1$ で定めると

$$\begin{cases} c_{n+1} = 2c_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ c_1 (= b_1 - 1 - 1) = 0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

となるから、漸化式 $\textcircled{2}$ を解くと、数列 $\{c_n\}$ の一般項は

$$c_n = 0$$

となる。したがって、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = n + 1$$

であることがわかる。

(答) $b_n = n + 1$

(3)

数列 $\{b_n\}$ は $b_n = \log_4 a_n$ で定めているから、(2)の結果より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\log_4 a_n = n + 1 \Leftrightarrow a_n = 4^{n+1}$$

であることがわかる。

(答) $a_n = 4^{n+1}$

(4)

$a_n \geq 10^{100}$ を満たす最小の n を求めればよい。まず、この不等式について、底を 2 とする対数をとると

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &\geq 100 \log_2 10 \\ &\Leftrightarrow (n+1) \log_2 4 \geq 100 (\log_2 2 + \log_2 5) \\ &\Leftrightarrow 2n + 2 \geq 100 (1 + \log_2 5) \\ &\Leftrightarrow n \geq 50 (1 + \log_2 5) - 1\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、問題文の条件より、 $2.321 < \log_2 5 < 2.322$ であるから、右辺について

$$\begin{aligned}2.321 < \log_2 5 < 2.322 \\ &\Leftrightarrow 3.321 < 1 + \log_2 5 < 3.322 \\ &\Leftrightarrow 166.05 < 50 (1 + \log_2 5) < 166.1 \\ &\Leftrightarrow 165.05 < 50 (1 + \log_2 5) - 1 < 165.1\end{aligned}$$

となる。したがって、求める n の値は、 $n = 166$ となることがわかる。

(答) 166

(1)

$x_1, x_2, \dots, x_6$ の組み合わせは全部で 3^6 通りであり、これらは同様に確からしく起こる。まず、

$$a = x_1(x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6)$$

について、 $a = 14 (= 1 \cdot 2 \cdot 7)$ となるのは、 $1 \leq x_1 \leq 3$ 、 $2 \leq x_2 + x_3 \leq 6$ 、 $3 \leq x_4 + x_5 + x_6 \leq 9$ より、

$$x_1 = 1, \quad x_2 + x_3 = 2, \quad x_4 + x_5 + x_6 = 7$$

のときであることがわかる。また、このようになる各数字の組み合わせは

$$x_1 = 1, \quad \{x_2, x_3\} = \{1, 1\}, \quad \{x_4, x_5, x_6\} = \{1, 3, 3\}, \{2, 2, 3\}$$

と考えられるから、求める確率は

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot ({}_3C_1 + {}_3C_1)}{3^6} = \frac{2}{243}$$

となる。

(答) $\frac{2}{243}$

(2)

a が 2 の倍数(偶数)である確率を求めるために、 a が奇数である確率を求めることを考える。

まず、 $a = x_1(x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6)$ であることから

$$a \text{ が奇数である} \Leftrightarrow x_1, x_2 + x_3, x_4 + x_5 + x_6 \text{ がすべて奇数である}$$

となる。ここで、1, 2, 3 から重複を許して 2 つの数を選んだときの和は以下の表のようになる。

	1	2	3
1	偶	奇	偶
2	奇	偶	奇
3	偶	奇	偶

したがって、 x_1 、 $x_2 + x_3$ 、 $x_4 + x_5 + x_6$ が奇数となる組み合わせは、それぞれ

x_1 が奇数である組み合わせ：2 通り

$x_2 + x_3$ が奇数である組み合わせ：4 通り

$x_4 + x_5 + x_6$ が奇数である組み合わせ： $2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 14$ 通り

となるから、求める確率は、余事象の確率を考えて

$$1 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 14}{3^6} = \frac{617}{729}$$

となる。

(答) $\frac{617}{729}$

(3)

次のように事象 A, B をおく。

A : a が 2 の倍数である

B : a の正の約数の個数が 4 である

このとき、求める確率は、条件付き確率 $P_A(B)$ となる。さらに、

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

であり、 $P(A)$ は(2)で求まっているから、 $P(A \cap B)$ を求めればよいことがわかる。ここで、

$A \cap B$: $a = 8$ または $a = 2p$ (p は 3 以上の素数)

となるから、以下、各場合についてそれぞれ考える。

[1] $a = 8$ のとき

$a = x_1(x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6)$ であり、 $1 \leq x_1 \leq 3$ 、 $2 \leq x_2 + x_3 \leq 6$ 、 $3 \leq x_4 + x_5 + x_6 \leq 9$ より

$$(x_1, x_2 + x_3, x_4 + x_5 + x_6) = (1, 2, 4)$$

のときであることがわかる。また、このようになる各数字の組み合わせは

$$x_1 = 1, \quad \{x_2, x_3\} = \{1, 1\}, \quad \{x_4, x_5, x_6\} = \{1, 1, 2\}$$

と考えられるから、求める確率は

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot {}_3C_1}{3^6} = \frac{3}{3^6}$$

となる。

[2] $a = 2p$ (p は 3 以上の素数) のとき

$a = x_1(x_2 + x_3)(x_4 + x_5 + x_6)$ であり、 $1 \leq x_1 \leq 3$ 、 $2 \leq x_2 + x_3 \leq 6$ 、 $3 \leq x_4 + x_5 + x_6 \leq 9$ より

$$(x_1, x_2 + x_3, x_4 + x_5 + x_6) = (1, 2, 3), (1, 2, 5), (1, 2, 7)$$

のときであることがわかる。また、このようになる各数字の組み合わせは

$$x_1 = 1, \quad \{x_2, x_3\} = \{1, 1\}, \quad \{x_4, x_5, x_6\} = \{1, 1, 1\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}, \{1, 3, 3\}, \{2, 2, 3\}$$

と考えられるから、求める確率は

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot (1 + {}_3C_1 + {}_3C_1 + {}_3C_1 + {}_3C_1)}{3^6} = \frac{13}{3^6}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{3^6} + \frac{13}{3^6}}{\frac{617}{3^6}} = \frac{16}{617}$$

となる。

(答) $\frac{16}{617}$

(1)

関数 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ の導関数を求め、因数分解すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 16x \\ &= 4x(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

となるから、増減表は以下のようになる。

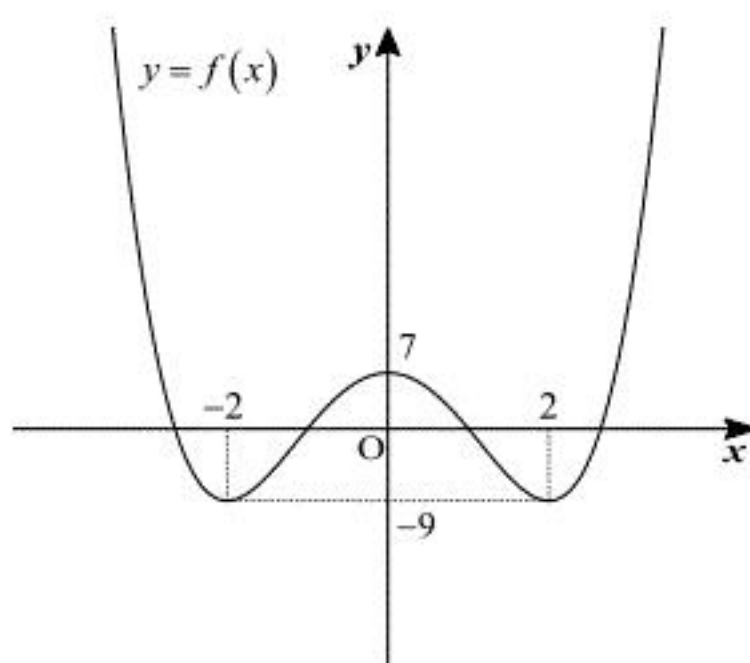
x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$	7	$\searrow$	-9	$\nearrow$

したがって、 $f(x)$ は $x=0$ で極大値 7、 $x=\pm 2$ で極小値 -9 をとることがわかる。

(答) 極大値 7, 極小値 -9

(2)

4 次方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解の個数は、 xy 平面上における曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の共有点の個数と一致する。ここで、(1)における考察より、 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



となる。したがって、求める実数解の個数は

$$\begin{cases} a < -9 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = -9, 7 < a \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 7 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ -9 < a < 7 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} a < -9 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = -9, 7 < a \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 7 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ -9 < a < 7 \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

(3)

関数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 8x^2 + 7 \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 7) \\ &= (x-1)(x+1)(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}) \end{aligned}$$

と変形できるから、 $f(x) = 0$ となるのは $x = \pm 1, \pm\sqrt{7}$ のときである。よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{7}}^{-1} -(x^4 - 8x^2 + 7) dx + \int_{-1}^1 (x^4 - 8x^2 + 7) dx + \int_1^{\sqrt{7}} -(x^4 - 8x^2 + 7) dx \\ &= 2 \left\{ \int_0^1 (x^4 - 8x^2 + 7) dx + \int_1^{\sqrt{7}} -(x^4 - 8x^2 + 7) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 7x \right]_0^1 - \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 7x \right]_1^{\sqrt{7}} \right\} \\ &= 2 \left\{ \left(\left(\frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 7 \right) - (0 - 0 + 0) \right) - \left(\left(\frac{49\sqrt{7}}{5} - \frac{56\sqrt{7}}{3} + 7\sqrt{7} \right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 7 \right) \right) \right\} \\ &= \frac{272 + 56\sqrt{7}}{15} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) S = \frac{272 + 56\sqrt{7}}{15}$$

(1)

$z_2=1$ を満たす θ を求める。与えられた漸化式について、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos 3\theta + i \sin 3\theta \end{aligned}$$

となる。よって、 $z_2=1$ が成り立つのは

$$\cos 3\theta = 1, \sin 3\theta = 0$$

を満たすときである。ここで、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $0 \leq 3\theta < 6\pi$ であるから、求める θ の値は

$$3\theta = 0, 2\pi, 4\pi \Leftrightarrow \theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

(2)

$z_n=1$ を満たす θ の個数 c_n を求める。まず、複素数 z_n は

$$z_n = \cos \frac{n(n+1)}{2}\theta + i \sin \frac{n(n+1)}{2}\theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

となることを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

題意より、 $z_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ であり、また、 $\textcircled{1}$ の右辺は

$$\cos \frac{1 \cdot 2}{2}\theta + i \sin \frac{1 \cdot 2}{2}\theta = \cos \theta + i \sin \theta$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は成立する。

[2] $n=k$ ($k \geq 1$)のとき

$\textcircled{1}$ が成立することを仮定する。与えられた漸化式について、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k \{ \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta \} \\ &= \left\{ \cos \frac{k(k+1)}{2}\theta + i \sin \frac{k(k+1)}{2}\theta \right\} \{ \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta \} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{k(k+1)}{2}} (\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} \\ &= (\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \\ &= \cos \frac{(k+1)(k+2)}{2}\theta + i \sin \frac{(k+1)(k+2)}{2}\theta \end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成立する。

以上[1],[2]より、数学的帰納法によって、すべての自然数 n に対して $\textcircled{1}$ が成立することが示された。よって、 $z_n=1$ が成り立つのは

$$\cos \frac{n(n+1)}{2}\theta = 1, \sin \frac{n(n+1)}{2}\theta = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たすときである。ここで、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $0 \leq \frac{n(n+1)}{2}\theta < n(n+1)\pi$ であり、 $n(n+1)$ は偶数であることから、 $\textcircled{2}$ を満たす θ の値は

$$\frac{n(n+1)}{2}\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, \{n(n+1)-2\}\pi$$

であることがわかる。したがって、求める c_n の値は

$$c_n = \frac{\{n(n+1)-2\}-0}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

となる。

また、 c_n が素数となる n を求める。すべての自然数 n について、 n または $n+1$ は偶数であることに注意すると、以下のようになる。

$$n \text{ が偶数のとき, } c_n = \frac{n}{2} \cdot (n+1) \text{ が素数になるには } \frac{n}{2} = 1 (\Leftrightarrow n=2) \text{ となる必要がある}$$

$$n \text{ が奇数のとき, } c_n = \frac{n+1}{2} \cdot n \text{ が素数になるには } \frac{n+1}{2} = 1 (\Leftrightarrow n=1) \text{ となる必要がある}$$

逆に、 $n=1, 2$ のとき、 c_n は以下のようになる。

$$n=1 \text{ のとき, } c_n = 1 \text{ である}$$

$$n=2 \text{ のとき, } c_n = 3 \text{ である}$$

したがって、 c_n が素数となる n は $n=2$ である。

$$(\text{答}) \quad c_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad c_n \text{ が素数となるもの: } n=2$$

(1)

直線 AB 上の点 $X(x, y, z)$ は

$$(x, y, z) = (0, 0, a) + k(1, 1, 1-a) \quad (k \text{ は実数})$$

と表せる。よって、直線 AB と平面 $x=t$ の交点について

$$k=t$$

であるから、点 P の座標は

$$(0, 0, a) + t(1, 1, 1-a) = (t, t, t+(1-t)a)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad (t, t, t+(1-t)a)$$

(2)

点 Q を $Q(t, 0, 0)$ とおく。曲面 S と 2 平面 $x=0, x=1$ で囲まれた立体を平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq 1$) で切った断面は、平面 $x=t$ ($0 \leq t \leq 1$) 上において点 P を点 Q を中心に 1 回転してできる円と一致する。ここで、点 P と点 Q の距離を r とおくと、断面積は πr^2 と表すことができ、また、

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(t-t)^2 + (t-0)^2 + \{t+(1-t)a-0\}^2} \\ &= \sqrt{t^2 + (1-a)^2 t^2 + 2(1-a)at + a^2} \\ &= \sqrt{(a^2 - 2a + 2)t^2 + 2(1-a)at + a^2} \end{aligned}$$

であるから、求める体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi r^2 dt \\ &= \pi \int_0^1 \{(a^2 - 2a + 2)t^2 + 2(1-a)at + a^2\} dt \\ &= \pi \left[\frac{a^2 - 2a + 2}{3} t^3 + (1-a)at^2 + a^2 t \right]_0^1 \\ &= \frac{a^2 + a + 2}{3} \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{a^2 + a + 2}{3} \pi$$

(3)

(2)の結果より、 V を a の 2 次関数と考えて、平方完成すると

$$\begin{aligned} V &= \frac{a^2 + a + 2}{3} \pi \\ &= \frac{\pi}{3} \left\{ \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} \right\} \end{aligned}$$

となる。したがって、 V を最小にする a の値は

$$a = -\frac{1}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{1}{2}$$