

(1)

点 P は辺 AB を 3:2 に内分するため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{2\vec{a} + 3\vec{b}}{3+2} \\ &= \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

となる。点 Q は辺 OB を 1:3 に内分するため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{a}$

(2)

$0 < s < 1, 0 < t < 1$ を満たす実数 s, t を用いて、

$$|\overrightarrow{AR}| : |\overrightarrow{RQ}| = s : 1-s, |\overrightarrow{OR}| : |\overrightarrow{RP}| = t : 1-t$$

とおけば、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} \\ &= \vec{a} + s\left(-\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) \\ &= (1-s)\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= t\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{2}{5}t\vec{a} + \frac{3}{5}t\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

である。 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるため、①、②の係数を比較することで

$$\begin{cases} 1-s = \frac{2}{5}t, \\ \frac{1}{4}s = \frac{3}{5}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{6}{7} \\ t = \frac{5}{14} \end{cases}$$

となる。よって、

$$|\overrightarrow{AR}| : |\overrightarrow{RQ}| = \frac{6}{7} : \frac{1}{7} = 6 : 1$$

である。

(答) 6:1

(3)

$|\vec{b}| = x$ とおくと、 $|\vec{a}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot x \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}x$ と表せることに注意すれば、

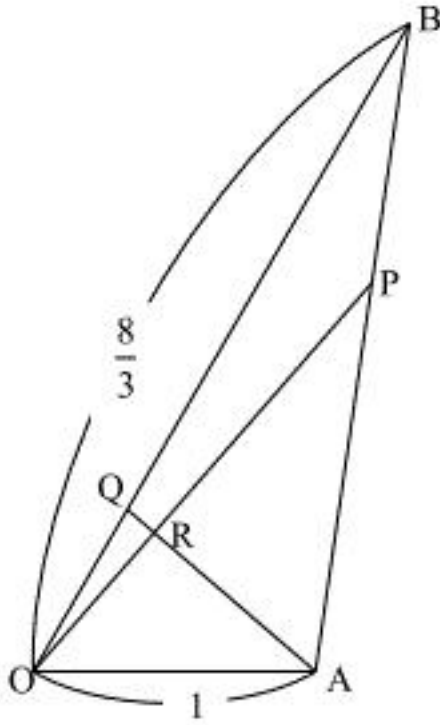
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &\perp \overrightarrow{AQ} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}\right) \cdot \left(-\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}x - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}x + \frac{3}{20}x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(3x-8) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \quad (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}$

(4)

$\triangle OAB$ および各点は下図のようになるので、



$\triangle OAR$ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin 60^\circ \cdot \frac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{AR}|}{|\overrightarrow{AQ}|} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{7} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{7}$

(1)

1次不定方程式

$$5x+3y=1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

に対して

$$5 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。①-②より、

$$\begin{aligned} 5(x-2)+3(y+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5(x-2) &= -3(y+3) \end{aligned}$$

を得る。5, 3は互いに素であるから、 $y+3$ は5の倍数である。よって、整数 k を用いて、

$$\begin{aligned} y+3 &= 5k \\ \Leftrightarrow y &= 5k-3 \end{aligned}$$

と表せる。このとき、

$$\begin{aligned} x-2 &= -3k \\ \Leftrightarrow x &= -3k+2 \end{aligned}$$

であるから、①の解は

$$(x, y) = (-3k+2, 5k-3)$$

となる。

(答) $(x, y) = (-3k+2, 5k-3) (k \text{ は整数})$

(2)

$$0 \leq x \leq 20$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -3k+2 \leq 20$$

$$\Leftrightarrow -6 \leq k \leq \frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

である。 $0 \leq x \leq 20$ を満たす x の個数 a_{20} すなわち、③を満たす整数 k の個数は7である。

(答) 7

(3)

$$0 \leq x \leq n$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -3k+2 \leq n$$

$$\Leftrightarrow \frac{-n+2}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。④を満たす整数 k の個数が a_n である。以下、 n を3で割った余りに注目して、場合分けをする。 m を自然数とする。[1] $n=3m-2$ のとき

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow -m + \frac{4}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow k = -m+2, -m+3, \dots, 0$$

となり、④を満たす自然数 k は $m-1$ 個ある。よって、 $a_{3m-2} = m-1$ である。[2] $n=3m-1$ のとき

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow -m+1 \leq k \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow k = -m+1, -m+2, \dots, 0$$

となり、④を満たす自然数 k は m 個ある。よって、 $a_{3m-1} = m$ である。[3] $n=3m$ のとき

$$\textcircled{4} \Leftrightarrow -m + \frac{2}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow k = -m+1, -m+2, \dots, 0$$

となり、④を満たす自然数 k は m 個ある。よって、 $a_{3m} = m$ である。

以上、[1], [2], [3]より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} a_k &= \sum_{m=1}^{34} a_{3m-2} + \sum_{m=1}^{33} a_{3m-1} + \sum_{m=1}^{33} a_{3m} \\ &= \sum_{m=1}^{34} (m-1) + \sum_{m=1}^{33} m + \sum_{m=1}^{33} m \\ &= 3 \sum_{m=1}^{33} m \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 33 \cdot 34 \\ &= 1683 \end{aligned}$$

となる。

(答) 1683

(4)

$$\sum_{k=1}^n a_k \geq 15000$$

を満たす最小の自然数 n を n_0 とし、 $3m-2 < n_0 \leq 3m+1$ (ただし m は自然数)とする。このとき、

$$\sum_{k=1}^{3m-2} a_k < \sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{3m+1} a_k \quad \cdots \textcircled{5}$$

が成立する。

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3m-2} a_k &= \sum_{l=1}^{m-1} a_{3l} + \sum_{l=1}^{m-1} a_{3l-1} + \sum_{l=1}^m a_{3l-2} \\ &= \sum_{l=1}^{m-1} l + \sum_{l=1}^{m-1} l + \sum_{l=1}^m (l-1) \\ &= 3 \sum_{l=1}^{m-1} l \\ &= \frac{3}{2} (m-1)m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3m+1} a_k &= \sum_{l=1}^m a_{3l} + \sum_{l=1}^m a_{3l-1} + \sum_{l=1}^{m+1} a_{3l-2} \\ &= \sum_{l=1}^m l + \sum_{l=1}^m l + \sum_{l=1}^{m+1} (l-1) \\ &= 3 \sum_{l=1}^m l \\ &= \frac{3}{2} m(m+1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\textcircled{5} \Leftrightarrow \frac{3}{2} (m-1)m < \sum_{k=1}^n a_k \leq \frac{3}{2} m(m+1)$$

となる。よって、

$$\frac{3}{2} (m-1)m < 15000 \leq \frac{3}{2} m(m+1) \quad \cdots \textcircled{6}$$

が成立する必要がある。

$$\frac{3}{2} \cdot 99 \cdot 100 = 14850 < 15000 \leq \frac{3}{2} \cdot 100 \cdot 101 = 15150$$

であるから⑥を満たすのは $m=100$ である。よって n_0 は

$$298 < n_0 \leq 301$$

を満たす。

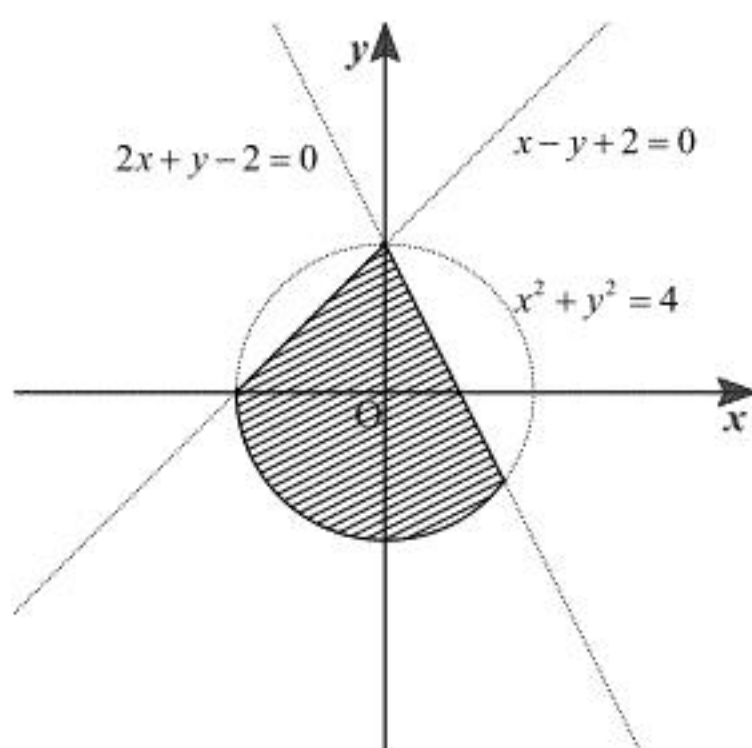
$$\sum_{k=1}^{299} a_k = 14950 < 15000$$

$$\sum_{k=1}^{300} a_k = 14950 + 100 = 15050 \geq 15000$$

であるため、 $n_0 = 300$ である。

(答) 300

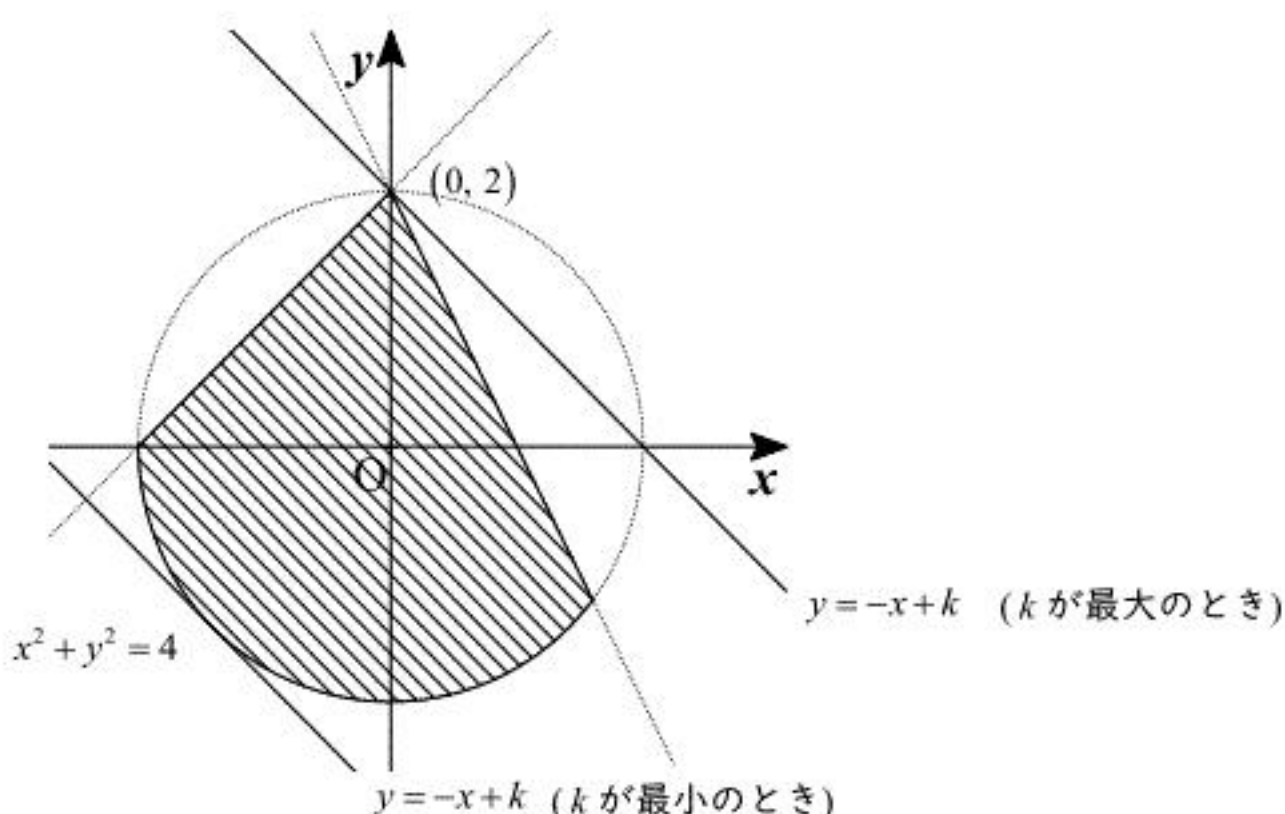
(1)



$$(x-y+2)(2x+y-2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow ((x-y+2 \leq 0) \text{ かつ } (2x+y-2 \geq 0)) \text{ または } ((x-y+2 \geq 0) \text{ かつ } (2x+y-2 \leq 0))$$

に注意すると、上図の斜線部及び境界が領域 D である。



$x+y=k \Leftrightarrow y=-x+k$ とおくと、これは傾き -1 、 y 切片 k の直線を表すため、この直線が D と共有点を持つ範囲を考えれば、 k は $(0, 2)$ で最大値 2 をとる。また、この直線が円 $x^2+y^2=4$ と第三象限で接するとき k は最小値をとる。このとき、 k が負の値をとることに注意すると、

$$\frac{|0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2$$

$$\therefore k=-2\sqrt{2} \quad (\because k < 0)$$

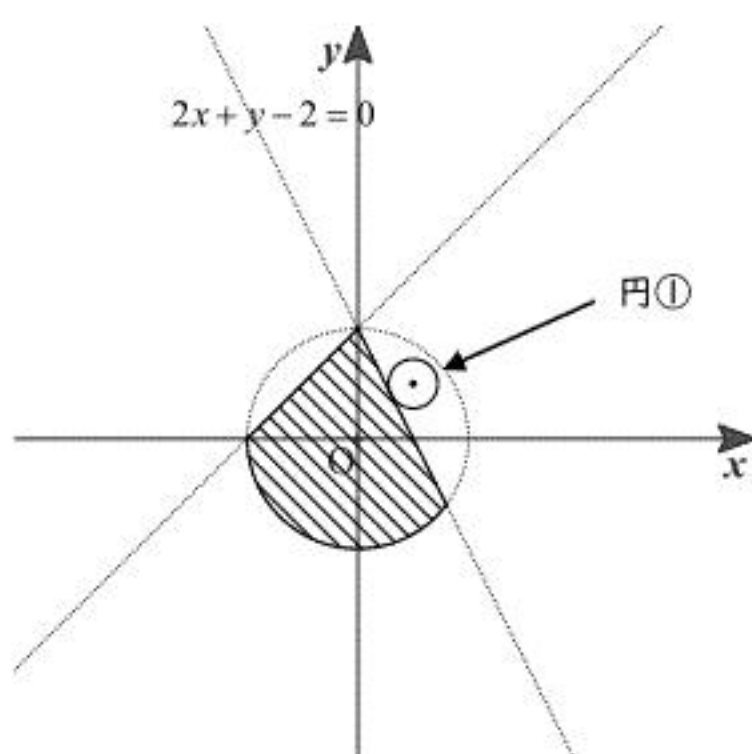
となる。

(答) 最大値: 2 , 最小値: $-2\sqrt{2}$

(2)

$$x^2+y^2-2x-2y=l \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=l+2 (\geq 0) \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、これは中心 $(1, 1)$ 、半径 $\sqrt{l+2}$ の円を表すので、 l は、下図のように $\textcircled{1}$ が直線 $2x+y-2=0$ に接するとき最小値をとる。



このとき、

$$\frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{l+2} \Leftrightarrow l = -\frac{9}{5}$$

であり、これを満たす (x, y) を求めると、

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y=-\frac{9}{5} \\ 2x+y-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(-2x+2)^2-2x-2(-2x+2)=-\frac{9}{5} \\ y=-2x+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x-3)^2=0 \\ y=-2x+2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{4}{5} \end{cases}$$

となる。

(答) 最小値: $-\frac{9}{5}$, そのときの $(x, y): (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(1)

$f'(x) = 3x^2 - 1$ であるから,

$$\begin{aligned} g(x) &= (3a^2 - 1)(x - a) + a^3 - a \\ &= (3a^2 - 1)x - 2a^3 \end{aligned}$$

である。 $y = f(x)$, $y = g(x)$ を連立して y を消去すると,

$$x^3 - x = (3a^2 - 1)x - 2a^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

$$\therefore x = a, -2a$$

を得る。これが $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標であり、接点でない方を選ぶと、
 $b = -2a$ である。

(答) $b = -2a$

(2)

$$\begin{aligned} \{f(x) - g(x)\}' &= f'(x) - g'(x) \\ &= 3x^2 - 1 - (3a^2 - 1) \\ &= 3(x - a)(x + a) \end{aligned}$$

であり、増減表は下図のようになるため、 $c = -a$ である。

x	b	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a
$\{f(x) - g(x)\}'$		+	0	-	
$f(x) - g(x)$	0	$\nearrow$	$4a^3$	$\searrow$	0

(答) $c = -a$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - x - \{(3a^2 - 1)x - 2a^3\} \\ &= x^3 - 3a^2x + 2a^3 \end{aligned}$$

であるから、(2)より $-2a \leq x \leq a$ で $f(x) - g(x) \geq 0$ であることに注意すれば、

$$S_1 = \int_{-2a}^a (x^3 - 3a^2x + 2a^3) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}a^2x^2 + 2a^3x \right]_{-2a}^a = \frac{11}{4}a^4$$

$$S_2 = \int_{-a}^a (x^3 - 3a^2x + 2a^3) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}a^2x^2 + 2a^3x \right]_{-a}^a = 4a^4$$

$$\therefore S_1 : S_2 = 11 : 16$$

となる。

(答) 11:16

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2^x - x \\
 &= e^{x \log 2} - x \\
 f'(x) &= \log 2 \cdot e^{x \log 2} - 1 \\
 &= 2^x \log 2 - 1
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $2^x \log 2 - 1$

(2)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2^x \log 2 - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow e^{x \log 2} &= \frac{1}{\log 2} \\
 \Leftrightarrow x \log 2 &= -\log(\log 2) \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{\log(\log 2)}{\log 2}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{\log(\log 2)}{\log 2}$

(3)

(2)で求めた x の前後で $f'(x)$ の符号が負から正に変わること注意到増減表は下表のようになる。

x	...	$-\frac{\log(\log 2)}{\log 2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $x = -\frac{\log(\log 2)}{\log 2}$ で $f(x)$ は最小値をとる。ここで、(2)より

$$\begin{aligned}
 2^{\frac{\log(\log 2)}{\log 2}} \log 2 - 1 &= 0 \\
 \therefore 2^{\frac{\log(\log 2)}{\log 2}} &= \frac{1}{\log 2}
 \end{aligned}$$

である。これより、

$$\begin{aligned}
 f\left(-\frac{\log(\log 2)}{\log 2}\right) &= 2^{-\frac{\log(\log 2)}{\log 2}} + \frac{\log(\log 2)}{\log 2} \\
 &= \frac{1}{\log 2} + \frac{\log(\log 2)}{\log 2} \\
 &= \frac{\log(e \log 2)}{\log 2}
 \end{aligned}$$

となり、 $e \log 2 > 2.7 \times 0.69 = 1.863 > 1$ であるから、最小値は正である。

(証明終)

(4)

(3)より $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2^x$ であるから、 $x > 0$ において、 $0 < \frac{x}{e^x} < \left(\frac{2}{e}\right)^x$ である。 $\frac{2}{e} < 1$ から、

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e}\right)^x = 0$ であるので、はさみうちの原理より、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$ である。

(証明終)

(1)

3次方程式

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

は $z = i$ を解に持つため

$$(i)^3 + a(i)^2 + bi + c = 0 \Leftrightarrow -a + c + (-1 + b)i = 0$$

を満たす。ここで a, b, c が実数より、

$$\begin{cases} -a + c = 0 \\ -1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 1 \end{cases}$$

となる。

(答) 1

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned} z^3 + az^2 + bz + c &= z^3 + az^2 + z + a \\ &= (z^2 + 1)(z + a) \end{aligned}$$

となるため、与方程式の解は $i, -i, -a$ である。 a が実数であることより複素数平面上において、 $-a$ で表される点から $i, -i$ で表される点までの距離は等しい。よって、この三点が一直線上にないとき、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形である。

(証明終)

(3)

 $\triangle ABC$ が正三角形になるとき、

$$|i - (-a)| = |i - (-i)|$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 = 4 (\because a \text{ は実数})$$

$$\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

であり、(1)より $c = a = \pm\sqrt{3}$ を得る。(答) $a = c = \pm\sqrt{3}$